**Mieczysław Fałat**

# MATEMATYKA

## 1. Statystyki egzaminu

W naszym okręgu do obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki, który przeprowadzono w dniu 5 maja 2010 roku, o godzinie 9.00, przystąpiło, po raz pierwszy, 31779 absolwentów szkół ponadgimnazjalnych (Tabela 1.). O godzinie 14.00, tego samego dnia, 4957 zdających (t.j. 15,6% zdających egzamin obowiązkowy) rozwiązywało zadania z matematyki wybranej jako przedmiot dodatkowy (poziom rozszerzony egzaminu).

Spośród 31779 zdających w naszym okręgu obowiązkowy egzamin maturalny, 27341 zdających uzyskało co najmniej 30% punktów z arkusza. Zatem w naszym okręgu zdawalność egzaminu z matematyki jest równa 86% (Tabela 2.). Zdawalność egzaminu była o 0,8 punktu procentowego wyższa w województwie opolskim (86,6%) niż zdawalność w województwie dolnośląskim (85,8%). Zdawalność zależała od typu szkoły i w naszym okręgu była najwyższa w liceach ogólnokształcących 93,6%. Przy tym, przykładowo, zdawalność liceach ogólnokształcących z województwa opolskiego była wyższa o 1,5 punktu procentowego w porównaniu ze zdawalnością w liceach ogólnokształcących z Dolnego Śląska (94,7% wobec 93,2%).

Tabela 1. Liczby uczniów na egzaminie maturalnym z matematyki (przystępujący po raz pierwszy, stan 30 czerwca)

| Zdający | Liczba zdających | | |
|---|---|---|---|
| | obowiązkowo | dodatkowo | RAZEM |
| | poziom podstawowy | poziom rozszerzony | |
| *OKE Wrocław* | | | |
| LO | 20268 | 4634 | 24902 |
| LP | 2134 | 55 | 2189 |
| T | 8216 | 267 | 8483 |
| LU | 957 | 1 | 958 |
| TU | 204 | - | 204 |
| RAZEM | 31779 | 4957 | 36736 |
| *Województwo dolnośląskie* | | | |
| LO | 15185 | 3666 | 18851 |
| LP | 1550 | 48 | 1598 |
| T | 5237 | 184 | 5421 |
| LU | 692 | 1 | 693 |
| TU | 121 | - | 121 |
| RAZEM | 22785 | 3899 | 26684 |
| *Województwo opolskie* | | | |
| LO | 5083 | 968 | 6051 |
| LP | 584 | 7 | 591 |
| T | 2979 | 83 | 3062 |
| LU | 265 | - | 265 |
| TU | 83 | - | 83 |
| RAZEM | 8994 | 1058 | 10052 |

Tabela 2. Zdawalność egzaminu maturalnego z matematyki

| Zdający | Uzyskali co najmniej 30% punktów z arkusza na egzaminie obowiązkowym (poziom podstawowy) | |
|---|---|---|
| | liczba | % |
| *OKE Wrocław* | | |
| LO | 18963 | 93,6 |
| LP | 1407 | 65,9 |
| T | 6475 | 78,8 |
| LU | 415 | 43,4 |
| TU | 81 | 39,7 |
| RAZEM | 27341 | 86,0 |
| *Województwo dolnośląskie* | | |
| LO | 14150 | 93,2 |
| LP | 1039 | 67,0 |
| T | 4052 | 77,4 |
| LU | 280 | 40,5 |
| TU | 35 | 28,9 |
| RAZEM | 19556 | 85,8 |
| *Województwo opolskie* | | |
| LO | 4813 | 94,7 |
| LP | 368 | 63,0 |
| T | 2423 | 81,3 |
| LU | 135 | 50,9 |
| TU | 46 | 55,4 |
| RAZEM | 7785 | 86,6 |

Dane z powyższej tabeli przedstawiamy również w formie graficznej (Diagram 1).

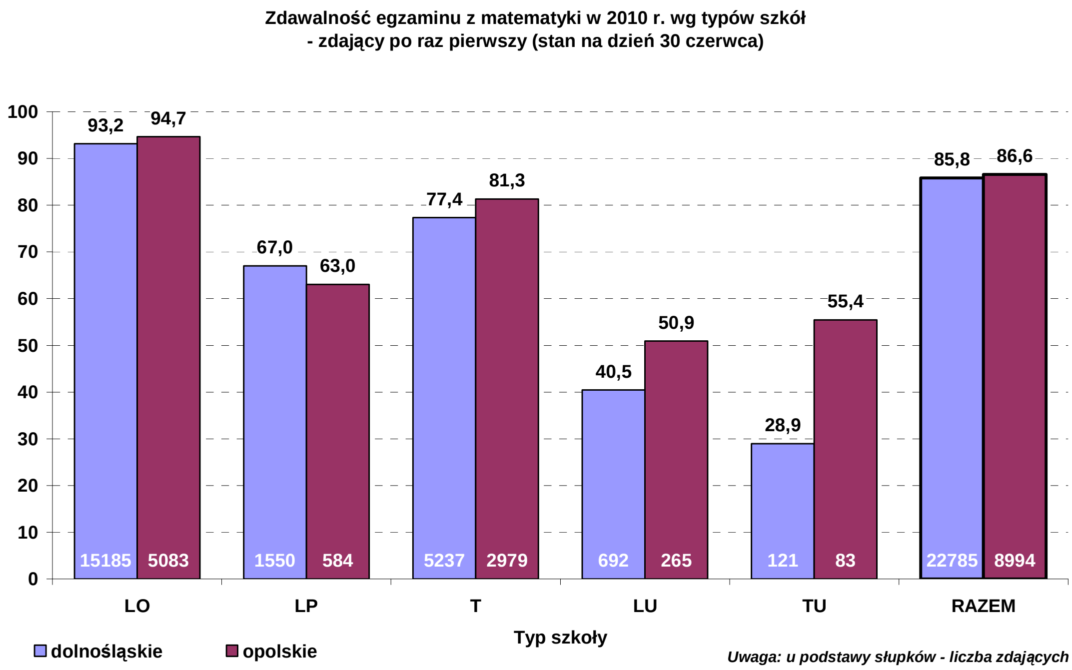



Diagram 1. Zdawalność egzaminu maturalnego z matematyki

W naszym okręgu średni wynik na obowiązkowym egzaminie maturalnym z matematyki wyniósł 57,7% (Tabela 3.). Najlepiej na egzaminie wypadli absolwenci liceów ogólnokształcących – średni wynik w tej grupie szkół to 65,9%, najsłabiej absolwenci liceów i techników uzupełniających – średnie wyniki w tych szkołach to odpowiednio 29,3% i 27,7%. Warto odnotować, że średni wynik procentowy w trzech typach szkół (poza liceami profilowanymi) jest wyższy w województwie opolskim niż w województwie dolnośląskim – różnice między średnimi wynikami są równe 1,3 punktu procentowego w liceach ogólnokształcących, 3,8 punktu procentowego w technikach, 3,1 punktu procentowego w liceach uzupełniających oraz 6,9 punktu procentowego w technikach uzupełniających.

Trudniejszy dla maturzystów okazał się egzamin z matematyki wybieranej jako przedmiot dodatkowy. Średni wynik procentowy w okręgu jest równy 46,6%. Maturzyści z województwa opolskiego osiągnęli średni wynik wyższy o 2 punkty procentowe niż maturzyści z Dolnego Śląska (odpowiednio 48,2% i 46,2%). Średnie wyniki procentowe w naszym okręgu zależały od typu szkoły i były najwyższe w grupie liceów ogólnokształcących (48,5%). Ponadto, maturzyści z liceów ogólnokształcących na Opolszczyźnie uzyskali o 2,9 punktu procentowego lepszy wynik średni niż ich rówieśnicy z Dolnego Śląska (odpowiednio 50,8% i 47,9%).

Dane z Tabeli 3. przedstawiono także w postaci graficznej (zob. Diagramy 2. i 3.).

Tabela 3. Średnie wyniki procentowe zdających egzamin maturalny z matematyki

| Zdający | Średni wynik procentowy | |
|---|---|---|
| | Obowiązkowy (poziom podstawowy) | Dodatkowy (poziom rozszerzony) |
| | *OKE Wrocław* | |
| LO | 65,9 | 48,5 |
| LP | 38,9 | 21,3 |
| T | 46,5 | 19,6 |
| LU | 29,3 | 6,0 |
| TU | 27,7 | - |
| RAZEM | 57,7 | 46,6 |
| | *Województwo dolnośląskie* | |
| LO | 65,6 | 47,9 |
| LP | 39,5 | 22,0 |
| T | 45,1 | 19,0 |
| LU | 28,5 | 6,0 |
| TU | 24,9 | - |
| RAZEM | 57,8 | 46,2 |
| | *Województwo opolskie* | |
| LO | 66,9 | 50,8 |
| LP | 37,3 | 16,9 |
| T | 48,9 | 20,9 |
| LU | 31,6 | - |
| TU | 31,8 | - |
| RAZEM | 57,6 | 48,2 |

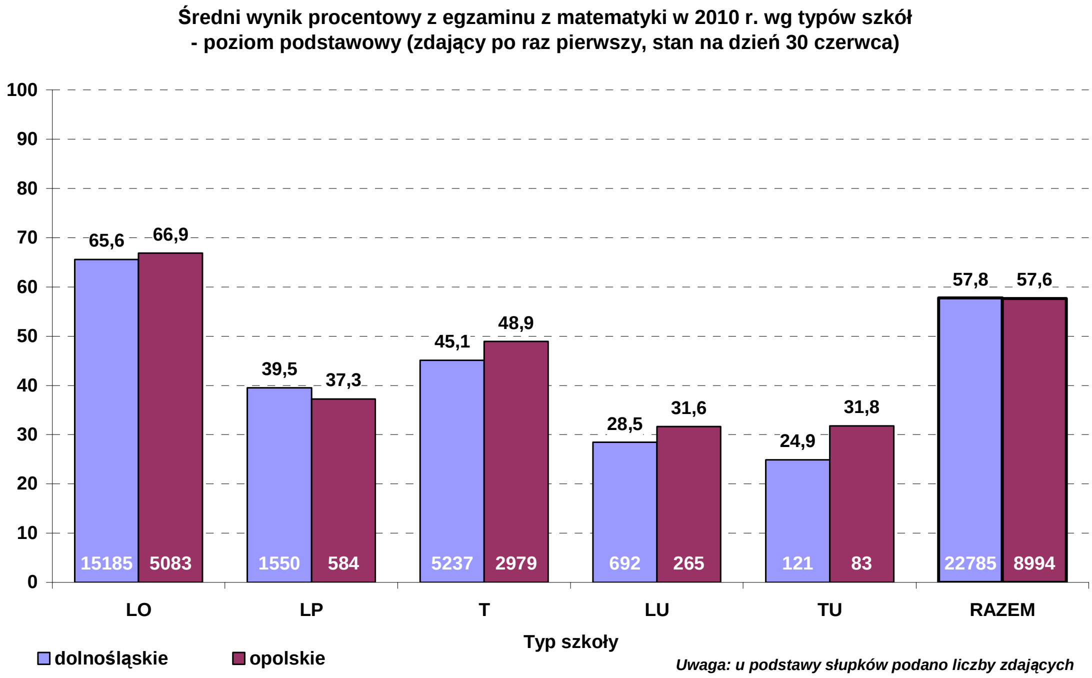



Diagram 2. Średnie wyniki procentowe egzaminu na poziomie podstawowym

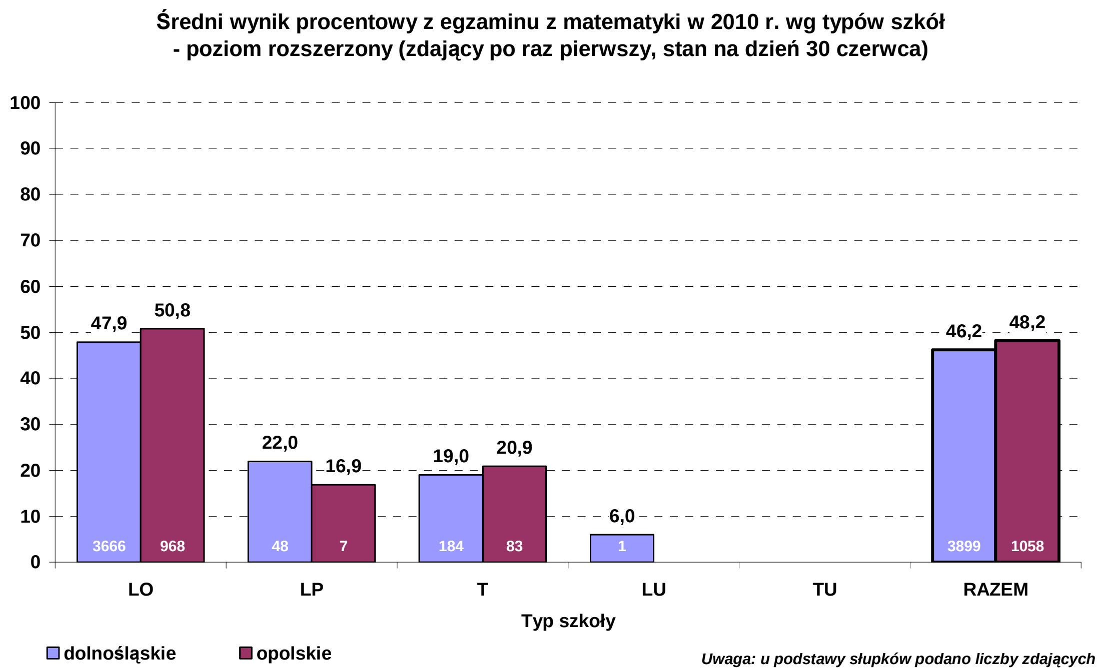



Diagram 3. Średnie wyniki procentowe egzaminu na poziomie rozszerzonym (matematyka wybierana jako przedmiot dodatkowy)

## 2. Opis arkuszy egzaminacyjnych

### Poziom podstawowy

*Opis arkusza standardowego*

Zestaw składał się z 34 zadań, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał odpowiedź spośród czterech propozycji) oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać).

Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było sześć zadań dwupunktowych, dwa zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Lista umiejętności sprawdzonych 34 zadaniami z arkusza na poziomie podstawowym wraz z odniesieniem do standardów wymagań egzaminacyjnych i do podstawy programowej matematyki jest zawarta w kartotece arkusza (Tabela 4). W trzeciej kolumnie kartoteki zastosowano skrótowe oznaczenia obszarów standardów, mianowicie:

obszar I – wykorzystanie i tworzenie informacji – skrót INF,
obszar II – wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji – skrót REP,
obszar III – modelowanie matematyczne – skrót MOD,
obszar IV – użycie i tworzenie strategii – skrót STR,
obszar V – rozumowanie i argumentacja – skrót ROZ.

Tabela 4. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego, matematyka, poziom podstawowy

| Nr zadania | Badana umiejętność<br>Zdający: | Standard wymagań egzaminacyjnych | Numer treści ze standardu | Typ zadania | Punktacja |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | stosuje interpretację geometryczną wartości bezwzględnej | I (INF), II (REP) | 1) f) | ZZ | 1 pkt |
| 2 | wykonuje obliczenia procentowe | III (MOD) | 1) d) | ZZ | 1 pkt |
| 3 | stosuje definicję potęgi o wykładniku zero | I (INF) | 1) g) | ZZ | 1 pkt |
| 4 | oblicza sumę logarytmów | II (REP), IV (STR) | 1) h) | ZZ | 1 pkt |
| 5 | dodaje wielomiany | I (INF) | 2) c) | ZZ | 1 pkt |
| 6 | rozwiązuje proste równanie wymierne prowadzące do równania liniowego | I (INF), II (REP) | 3) e) | ZZ | 1 pkt |
| 7 | sprawdza, czy liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej | I (INF), II (REP) | 3) a) | ZZ | 1 pkt |
| 8 | odczytuje współrzędne wierzchołka paraboli z jej postaci kanonicznej | I (INF), II (REP) | 4) h) | ZZ | 1 pkt |
| 9 | wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej | II (REP) | 4) g) | ZZ | 1 pkt |
| 10 | odczytuje własności funkcji z jej wykresu | II (REP) | 4) b) | ZZ | 1 pkt |
| 11 | wyznacza wyraz ciągu arytmetycznego | I (INF), II (REP) | 5) a) | ZZ | 1 pkt |
| 12 | oblicza iloraz ciągu geometrycznego | I (INF), II (REP) | 5) a) | ZZ | 1 pkt |
| 13 | oblicza liczbę przekątnych wielokąta | I (INF), II (REP) | 7) c) | ZZ | 1 pkt |
| 14 | stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia | II (REP) | 6) c) | ZZ | 1 pkt |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | oblicza długość boku kwadratu wpisanego w okrąg | I (INF), II (REP) | 7) c) | ZZ | 1 pkt |
| 16 | oblicza wysokość trójkąta równoramiennego stosując twierdzenie Pitagorasa | I (INF), II (REP) | 7) c) | ZZ | 1 pkt |
| 17 | wykorzystuje własności figur podobnych do obliczenia długości odcinka | I (INF), II (REP) | 7) b) | ZZ | 1 pkt |
| 18 | oblicza miarę kąta środkowego | I (INF) | 7) a) | ZZ | 1 pkt |
| 19 | oblicza pole podanej figury | II (REP) | 7) c) | ZZ | 1 pkt |
| 20 | wskazuje współczynnik kierunkowy prostej równoległej do danej prostej | I (INF), II (REP) | 8) c) | ZZ | 1 pkt |
| 21 | wskazuje równanie okręgu o podanym promieniu | I (INF), II (REP) | 8) g) | ZZ | 1 pkt |
| 22 | oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie | II (REP) | 8) e) | ZZ | 1 pkt |
| 23 | oblicza pole powierzchni wielościanu | I (INF) | 9) b) | ZZ | 1 pkt |
| 24 | oblicza liczbę krawędzi wielościanu | I (INF) | 9) b) | ZZ | 1 pkt |
| 25 | oblicza średnią arytmetyczną | I (INF) | 10) a) | ZZ | 1 pkt |
| 26 | rozwiązuje nierówność kwadratową | II (REP) | 3) a) | KO | 2 pkt |
| 27 | rozwiązuje równanie wielomianowe metodą rozkładu na czynniki | I (INF), II (REP) | 3) d) | KO | 2 pkt |
| 28 | przeprowadza dowód geometryczny | V (ROZ) | 7) b) | KO | 2 pkt |
| 29 | oblicza wartość funkcji trygonometrycznej kąta ostrego znając wartość innej funkcji trygonometrycznej tego kąta | II (REP), IV (STR) | 6) d) | KO | 2 pkt |
| 30 | przeprowadza dowód nierówności algebraicznej | V (ROZ) | 2) f) | KO | 2 pkt |
| 31 | oblicza obwód figury wykorzystując związki miarowe w trójkącie prostokątnym i równobocznym | I (INF), II (REP) | 7) c) | KO | 2 pkt |
| 32 | oblicza objętość wielościanu | IV (STR) | 9) b) | RO | 4 pkt |
| 33 | oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa | III (MOD) | 10) d) | RO | 4 pkt |
| 34 | rozwiązuje zadanie, umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzące do równania kwadratowego | III (MOD) | 3) b) | RO | 5 pkt |

Najwięcej punktów za zadania z tego arkusza (58%), maturzyści mogli uzyskać za zaprezentowanie umiejętności opisanych I i II obszarem standardów wymagań egzaminacyjnych (wykorzystanie i tworzenie informacji oraz wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji). 20% punktów mogli uzyskać za wykazanie się umiejętnością modelowania matematycznego (III obszar standardów), 14% punktów za zaprezentowanie umiejętności użycia strategii (IV obszar standardów) i wreszcie 8% punktów za wykazanie się umiejętnością przeprowadzenia rozumowań i argumentacji (obszar V standardów). Zauważmy ponadto, że 44% punktów za zadania z tego arkusza dotyczyło geometrii oraz trygonometrii.

### Poziom rozszerzony

*Opis arkusza standardowego*

Zestaw składał się z 11 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich było 6 zadań czteropunktowych, 4 zadania pięciopunktowe i jedno zadanie sześciopunktowe.

Zadania sprawdzały umiejętności opisane w trzech obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych (modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii oraz rozumowania i argumentacji). Kartoteka arkusza (Tabela 5.) zawiera listę umiejętności sprawdzonych 11 zadaniami z arkusza na poziomie rozszerzonym wraz z odniesieniem do standardów wymagań egzaminacyjnych i do podstawy programowej matematyki.

Tabela 5. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego, matematyka, poziom rozszerzony

| Nr zadania | Badana umiejętność<br>Zdający: | Standard wymagań egzaminacyjnych | Numer treści ze standardu | Typ zadania | Punktacja |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | rozwiązuje nierówność z wartością bezwzględną | II (REP), IV (STR) | 3) e)R | RO | 4 pkt |
| 2 | rozwiązuje równanie trygonometryczne | IV (STR) | 6) e)R | RO | 4 pkt |
| 3 | rozwiązuje zadanie w kontekście praktycznym prowadzące do badania funkcji kwadratowej | III (MOD), IV (STR) | 4) l) | RO | 4 pkt |
| 4 | stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian | IV (STR) | 2) b)R | RO | 4 pkt |
| 5 | wykorzystuje własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do rozwiązania zadania | III (MOD) | 5) | RO | 5 pkt |
| 6 | przeprowadza dyskusję dotyczącą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem | IV (STR) | 3) b)R | RO | 5 pkt |
| 7 | rozwiązuje zadanie z geometrii analitycznej | IV (STR) | 8) R | RO | 6 pkt |
| 8 | przeprowadza dowód algebraiczny | V (ROZ) | 4) l) | RO | 5 pkt |
| 9 | przeprowadza dowód geometryczny | V (ROZ) | 7) c) | RO | 4 pkt |
| 10 | oblicza prawdopodobieństwo z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa | III (MOD), IV (STR) | 10) R | RO | 4 pkt |
| 11 | wyznacza objętość wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii | IV (STR) | 9) b) | RO | 5 pkt |

Należy zwrócić uwagę, że 18% punktów maturzyści mogli uzyskać za wykazanie się umiejętnością modelowania matematycznego, 64% punktów za zaprezentowanie umiejętności użycia strategii i 18% punktów za wykazanie się umiejętnością prowadzenia rozumowań. Podobnie jak w arkuszu dla poziomu podstawowego, maturzyści najwięcej punktów mogli uzyskać za zadania z geometrii i trygonometrii (38% punktów).

## 3. Wskaźniki łatwości arkuszy i zadań egzaminacyjnych

### Poziom podstawowy

(Średnia) łatwość arkusza egzaminacyjnego jest określona przez średni wynik procentowy uzyskany przez zdających. W naszym okręgu średni wynik procentowy uzyskany przez zdających na obowiązkowym egzaminie maturalnym z matematyki jest równy 57,7%, a to oznacza, że arkusz był umiarkowanie trudny (por. klasyfikacja B. Niemierki). Odchylenie standardowe od średniego wyniku punktowego jest równe 6,3 punktu i oznacza, że około 37% zdających uzyskało wyniki z przedziału $\langle 22, 35 \rangle$ punktów. Mediana wyników ma wartość 29 punktów.

Kolejne tabele, wykresy i diagramy są odniesione do wyników wszystkich zdających w maju oraz czerwcu (termin dodatkowy), których w naszym okręgu było 32 342 (31 779 zdających po raz pierwszy oraz 563 zdających z lat ubiegłych). Dodać trzeba, że w poniższych analizach nie uwzględniono wyników 12 maturzystów – laureatów i finalistów olimpiady matematycznej, którym zgodnie z prawem przysługuje najwyższy wynik na maturze. Nie uwzględniono także wyników 57 zdających, którym arkusz egzaminacyjny z matematyki unieważniono. Diagram 4. ilustruje rozkład wyników punktowych uzyskanych przez zdających. Optymizmem napawa kształt wykresu. Ponadto, cieszy fakt, że 390 zdających uzyskało wynik maksymalny, 50 punktów z arkusza (1,2% wszystkich zdających). Na drugim biegunie jest 4417 zdających, którzy nie zdołali pokonać progu zdania egzaminu określonego na 30% punktów z arkusza, czyli 15 punktów. W szczególności, 3 maturzystów nie zdobyło nawet jednego punktu.

Z diagramu 5. dość łatwo widać, że maturzyści z liceów ogólnokształcących (ich było najwięcej) częściej niż pozostali zdający uzyskiwali wyższe wyniki. W szczególności na 390 wyników maksymalnych tylko 3 uzyskali zdający z liceów profilowanych, 2 z techników czteroletnich, pozostałe są dziełem absolwentów liceów ogólnokształcących.

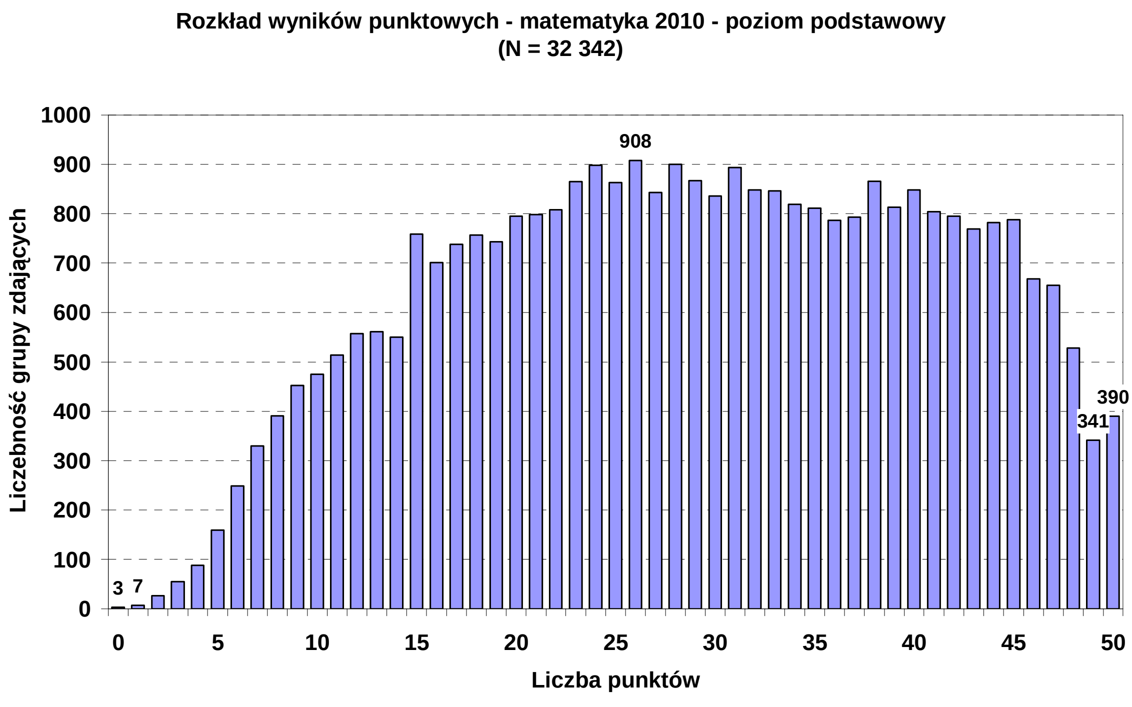



Diagram 4. Rozkład wyników punktowych

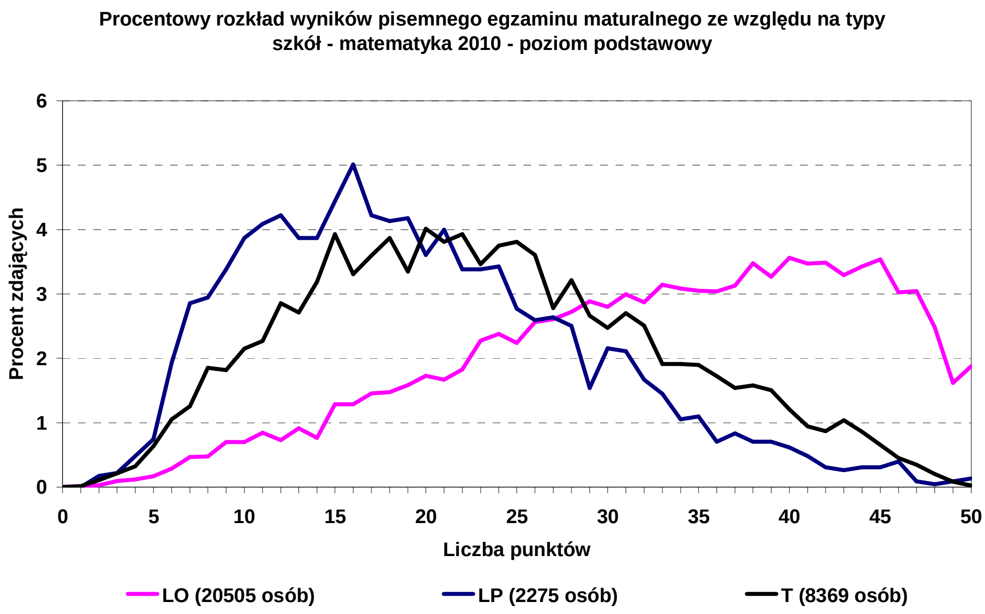



Diagram 5. Procentowy rozkład wyników egzaminu ze względu na typy szkół

W poniższej dwuczęściowej tabeli 6., zestawiono wskaźniki łatwości oraz opuszczenia w 25 zadaniach zamkniętych. Przypomnieć należy, że zadania zamknięte zostały przygotowane w dwóch wersjach, różniących się tylko inną kolejnością dystraktorów. Co ciekawe, zmiana kolejności dystraktorów nie spowodowała żadnej zmiany wskaźnika łatwości w 12 zadaniach, zmiany tego wskaźnika wystąpiły natomiast w pozostałych 13 zadaniach.

Tabela 6. Wskaźnik łatwości oraz opuszczenia w zadaniach zamkniętych

(wersja A – 16271 osób, wersja B – 16071 osób)

| Numer zadania | | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opuszczenia | Wersja A | 16 | 5 | 8 | 11 | 5 | 33 | 32 | 18 | 23 | 63 | 8 | 23 | 20 |
| | Wersja B | 8 | 3 | 7 | 13 | 11 | 26 | 21 | 19 | 17 | 63 | 6 | 25 | 28 |
| Wskaźnik łatwości zadania | Wersja A | 0,64 | 0,74 | 0,94 | 0,69 | 0,91 | 0,80 | 0,87 | 0,66 | 0,76 | 0,69 | 0,86 | 0,77 | 0,49 |
| | Wersja B | 0,63 | 0,73 | 0,94 | 0,69 | 0,89 | 0,81 | 0,89 | 0,66 | 0,74 | 0,69 | 0,86 | 0,77 | 0,50 |

| Numer zadania | | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 20. | 21. | 22. | 23. | 24. | 25. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opuszczenia | Wersja A | 75 | 14 | 15 | 21 | 9 | 106 | 40 | 46 | 67 | 14 | 24 | 9 |
| | Wersja B | 71 | 19 | 17 | 18 | 7 | 82 | 22 | 27 | 86 | 13 | 23 | 8 |
| Wskaźnik łatwości zadania | Wersja A | 0,71 | 0,63 | 0,86 | 0,50 | 0,90 | 0,55 | 0,73 | 0,81 | 0,64 | 0,81 | 0,69 | 0,93 |
| | Wersja B | 0,73 | 0,64 | 0,85 | 0,50 | 0,91 | 0,55 | 0,73 | 0,84 | 0,63 | 0,81 | 0,69 | 0,93 |

Najtrudniejszym zadaniem dla zdających okazało się zadanie 17., wymagające obliczenia długości odcinka z zastosowaniem podobieństwa trójkątów, czy może po prostu zastosowania twierdzenia Talesa. Najłatwiejsze było zadanie 3. sprawdzające znajomość potęgi o wykładniku zero. Największa zmiana wskaźnika łatwości zaszła w zadaniu 21. i równa się aż 3 punktom procentowym. Zadanie polegające na rozpoznaniu równania okręgu o promieniu 6 okazało się niespodziewanie łatwiejsze w wersji B. Niewielka jest natomiast liczba opuszczeń zadań zamkniętych – najwięcej odnotowano ich w zadaniu 19. (łącznie, w obu wersjach było ich 188, czyli ok. 0,6%).

W kolejnych dwóch diagramach (6. i 7.) zamieszczono rozkład odpowiedzi w zadaniach zamkniętych w obu wersjach. Wynika z nich, że najczęściej wybieraną odpowiedzią był werstraktor – czyli poprawna odpowiedź.

W wersji A testu, w zadaniach 4., 13., 17. oraz 19., , zaskakująco często były wybierane odpowiedzi niepoprawne (odpowiednio 23,8%, 20,3%, 34,5% i 21,9%).

W zadaniu 4. niemal co czwartego zdającego przyciągnęła „bardzo atrakcyjna" odpowiedź: „10" na pytanie: ile to jest $\log_4 8 + \log_4 2$. Dużo rzadziej były wybierane odpowiedzi: 1 oraz $\log_4 6$.

W zadaniu 13. niepoprawna odpowiedź „7" na pytanie o liczbę przekątnych siedmiokąta foremnego była atrakcyjna dla co piątego zdającego.

W zadaniu 17. co trzeci zdający uległ magii odpowiedzi niepoprawnej „B". Pewnie pośpiech spowodował brak refleksji nad błędnym rozumowaniem stosowanym w związku z twierdzeniem Talesa: zamiast poprawnej proporcji $\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|CA|}$, w brudnopisach pojawiała się błędna $\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|DA|}$ i stąd wybór błędnej odpowiedzi „B" – 3, zamiast poprawnej „A" – 2. Z kolei w zadaniu 19., zdający w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o pole zacieniowanego trójkąta, stosowali wzór $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$ i zapominali pewnie pomnożyć iloczyn połowy długości boków trójkąta przez $\frac{1}{2} = \sin 30°$, stąd zamiast $1600\,cm^2$ otrzymywali $3200\,cm^2$.

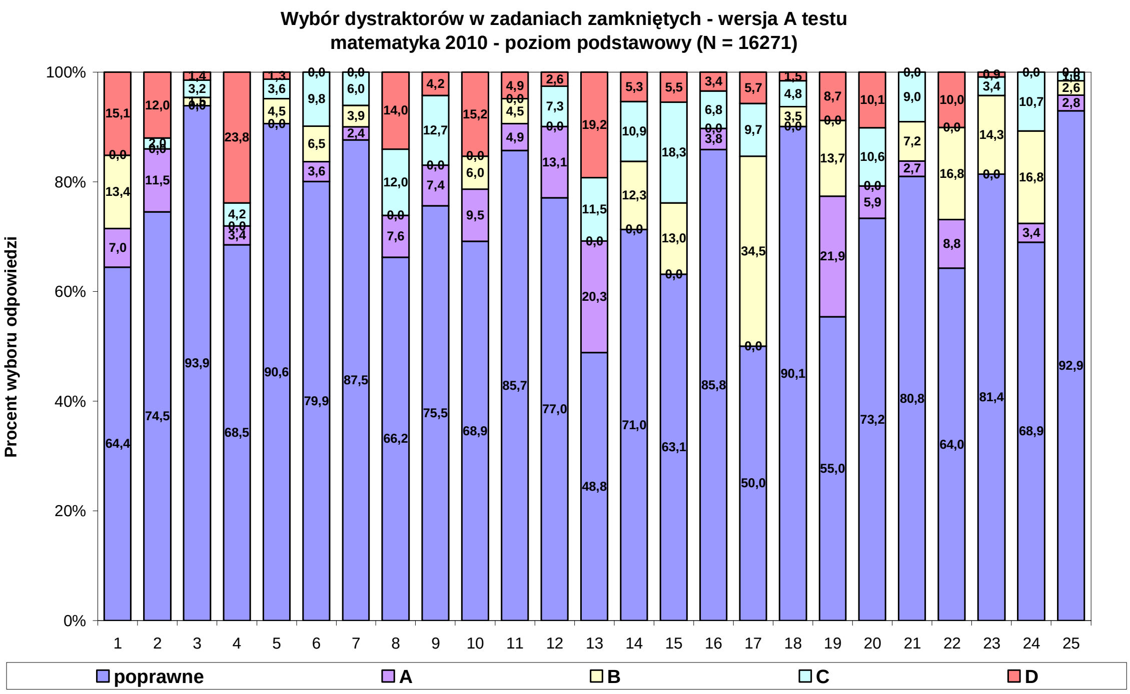



Diagram 6. Wybór dystraktorów – wersja A

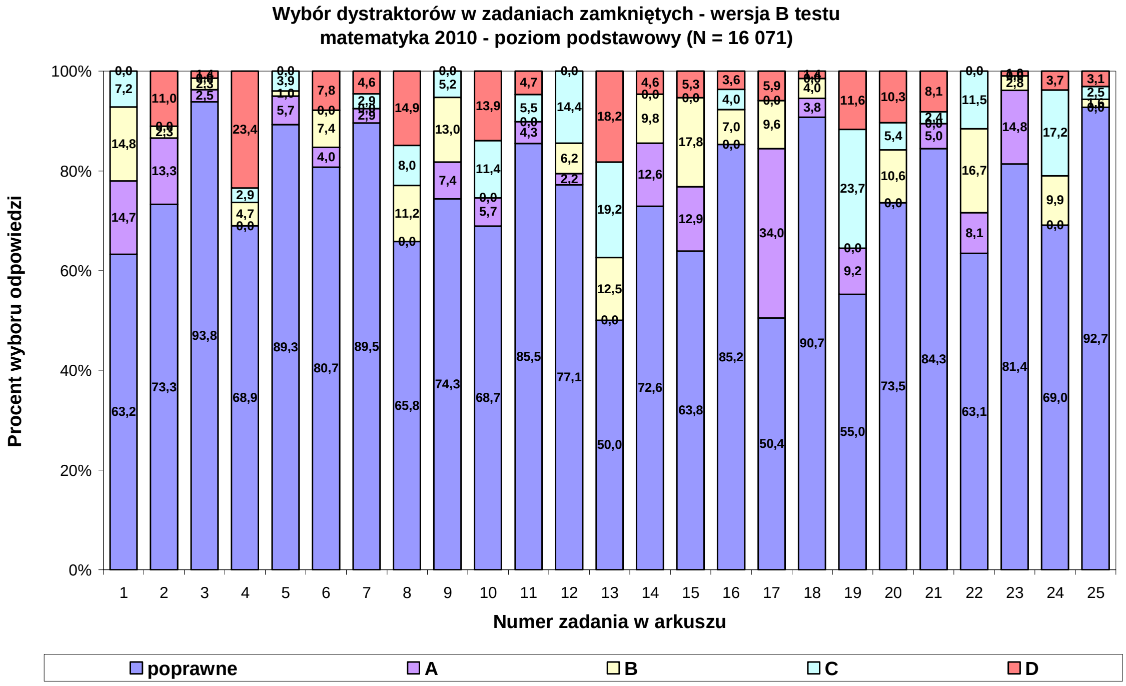



Diagram 7. Wybór dystraktorów – wersja B

W wersji B testu sytuacja powtarza się w odniesieniu do zadań 4. 17. i 19. Natomiast w zadaniu 13. oprócz niepoprawnej odpowiedzi „7" jako liczby przekątnych siedmiokąta pojawia się niemal tak samo często błędna odpowiedź „28". Zdający zapominali podzielić przez 2 iloczyn $7 \cdot 4$ – być może nie pamiętali poprawnej postaci wzoru $\frac{n(n-3)}{2}$, ale co być może ważniejsze, zaufali swej pamięci, zamiast po prostu narysować w brudnopisie siedmiokąt z przekątnymi i policzyć je.

Diagram 8. ilustruje rozkład wyników uzyskanych przez zdających z poszczególnych typów szkół w 25 zadaniach zamkniętych. Wielokrotnie liczniejsza jest grupa absolwentów liceów ogólnokształcących, w porównaniu z grupą absolwentów liceów profilowanych czy techników, osiągających bardzo wysokie wyniki. W szczególności, maksymalną liczbę, 25 punktów za zadania zamknięte uzyskało 2555 absolwentów LO, 171 absolwentów techników oraz 19 absolwentów LP.

I jeszcze jedno porównanie wyników zdających z trzech typów szkół, tym razem w odniesieniu do zadań otwartych (Diagram 9.). Zależność opisana powyżej, w odniesieniu do wyników wysokich, nie jest co prawda tak silna, dalej jednak jest dość wyraźnie zauważalne, że maturzyści z LO częściej niż pozostali zdołali uzyskać wyniki wysokie i bardzo wysokie.

W szczególności maksymalną liczbę 25 punktów za zadania otwarte uzyskało 531 maturzystów z LO, 5 absolwentów techników i 3 absolwentów LP. Na drugim biegunie znajduje się liczna grupa maturzystów, którzy nie zdołali uzyskać nawet jednego punktu. Wśród nich jest 1122 absolwentów techników, 960 absolwentów LO i 453 absolwentów LP.

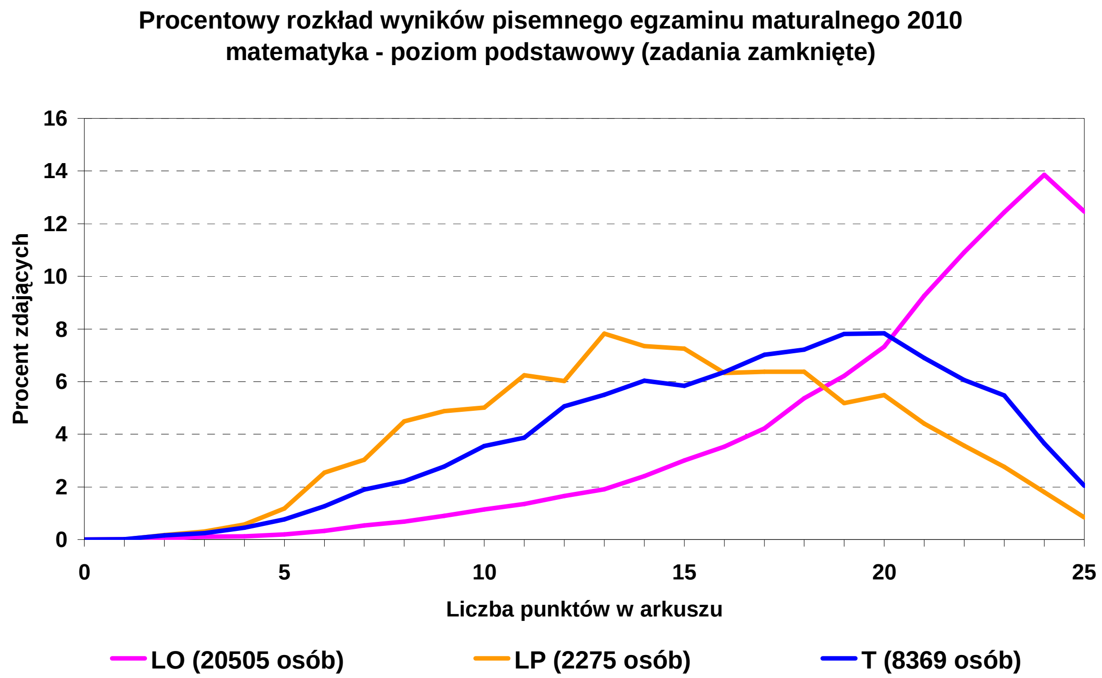



Diagram 8. Zadania zamknięte w trzech typach szkół – procentowy rozkład wyników

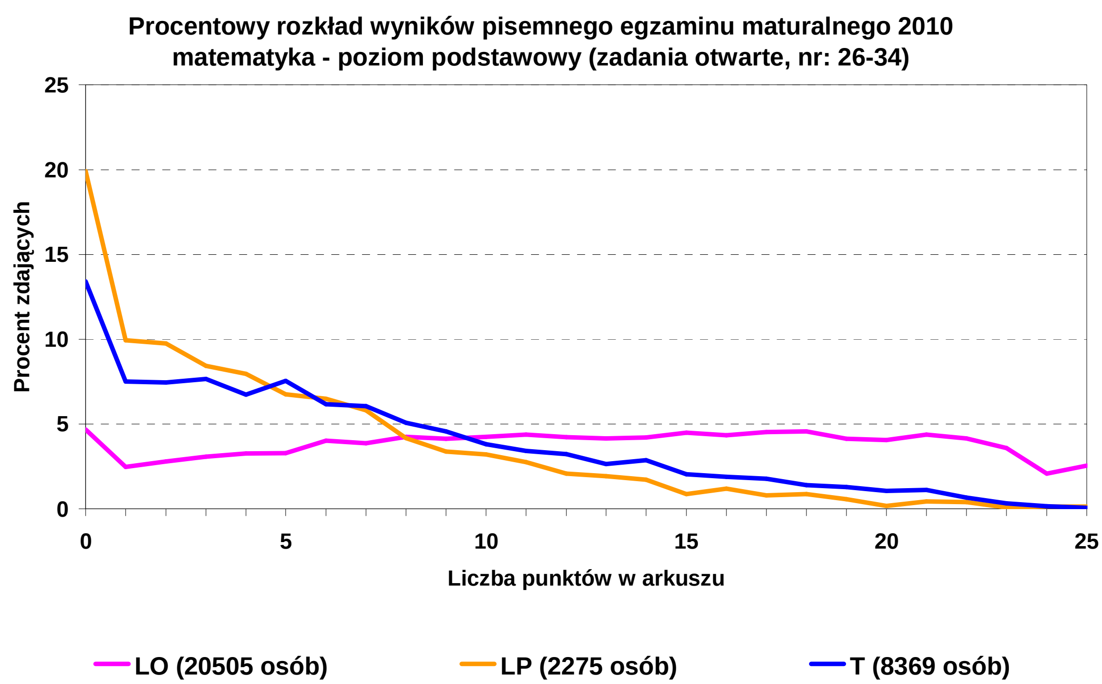



Diagram 9. Zadania otwarte w trzech typach szkół – procentowy rozkład wyników

Spośród dziewięciu zadań otwartych w arkuszu dla poziomu podstawowego tylko trzy okazały się umiarkowanie trudne dla zdających: zadanie 26., zadanie 27. i zadanie 29. Cztery zadania: 31., 32., 33. i 34. były trudne, zaś dwa zadania bardzo trudne: 28. i 30 (Diagram 10.).

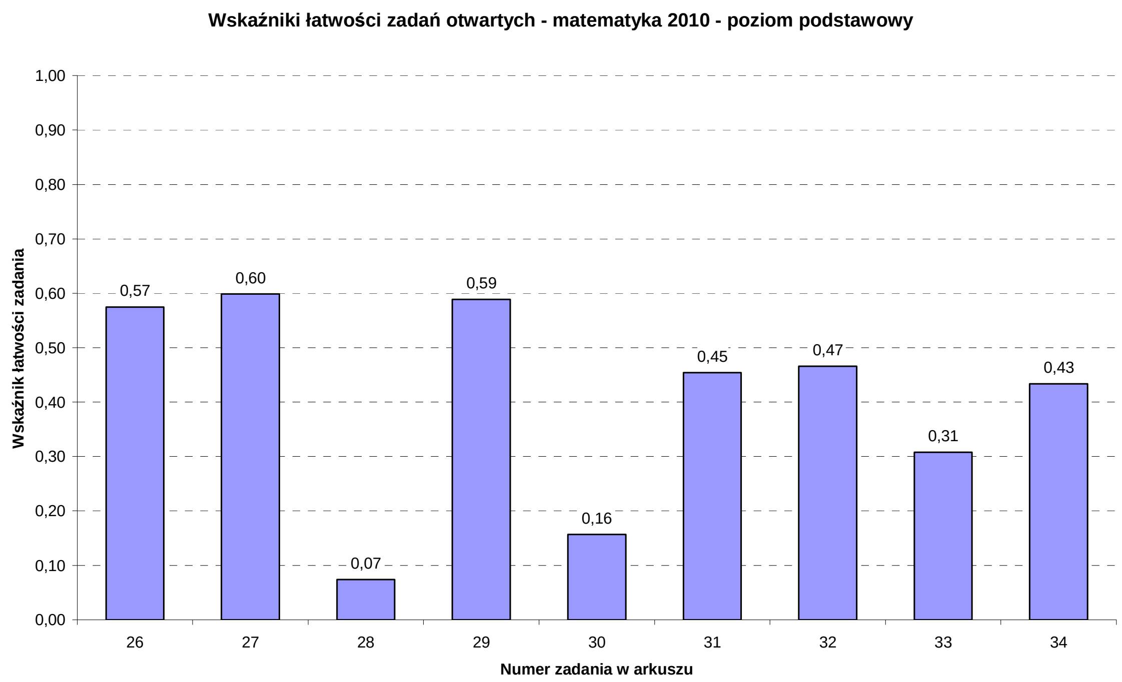



Diagram 10. Wskaźniki łatwości zadań otwartych

Podobnie jak na próbnym egzaminie maturalnym przeprowadzonym w listopadzie 2009 roku, najtrudniejszymi zadaniami dla zdających były te, które sprawdzały umiejętność przeprowadzenia dowodu (zadanie 28. – dowód geometryczny, zadanie 30. – dowód algebraiczny). Jak widać poniżej (Tabela 7.), trzy najtrudniejsze zadania w arkuszu były jednocześnie najczęściej opuszczanymi zadaniami w tym arkuszu (zadania: 28., 30. i 33.).

Tabela 7. Frakcje opuszczeń zadań otwartych w arkuszu dla poziomu podstawowego

| Nr zadania w arkuszu | 26. | 27. | 28. | 29. | 30. | 31. | 32. | 33. | 34. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Opuszczenia | 5,5% | 6,5% | 31% | 12,6% | 20,2% | 7,4% | 9,1% | 21,1% | 13,9% |

Warto przypomnieć, że arkuszu z próbnej matury nie było – z racji terminu - zadania z rachunku prawdopodobieństwa. Teraz trzeba ze smutkiem skonstatować, że co piąty maturzysta nie podjął nawet próby rozwiązania zadania, w którym doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką do gry (zadanie 33.). Tabela 8. zawiera z kolei rozkłady punktów zdobywanych kolejno we wszystkich zadaniach otwartych.

Tabela 8. Zadania otwarte – procentowy rozkład poszczególnych punktów

| Uzyskane punkty | Nr zadania w arkuszu | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 26. | 27. | 28. | 29. | 30. | 31. | 32. | 33. | 34. |
| 0 pkt | 29,4% | 32,6% | 89,4% | 38,1% | 77,7% | 48,1% | 34,4% | 49,5% | 36,9% |
| 1 pkt | 26,2% | 15% | 6,4% | 6,1% | 13,3% | 13% | 22,9% | 23,4% | 7,2% |
| 2 pkt | 44,4% | 52,4% | 4,2% | 55,9% | 9% | 39% | 1,4% | 2,1% | 15,9% |
| 3 pkt | | | | | | | 4,2% | 4,4% | 8,4% |
| 4 pkt | | | | | | | 37% | 20,7% | 5,1% |
| 5 pkt | | | | | | | | | 26,4% |

Warto zwrócić uwagę na to, że w czterech zadaniach: 26. (nierówność kwadratowa), 27. (równanie stopnia trzeciego), 29. (trygonometria) i 32. (objętość ostrosłupa) najliczniejsze są grupy maturzystów, którzy potrafią swoje rozwiązania doprowadzić poprawnie do końca (odpowiednio 44,4%, 52,4%, 55,9% i 37% zdających).

W pozostałych pięciu zadaniach najliczniejsze są grupy zdających, którzy za swoje zadanie nie potrafili uzyskać choćby jednego punktu. Wrażenie największe wywierają liczebności grup zdających, którzy nie zdobyli żadnego punktu w zadaniach 28. i 30. (89,4% i 77,7%). Zadziałała nie tylko magia polecenia „wykaż", bo przecież opuszczeń w tych zadaniach było odpowiednio 31% i 20,2%. Częściej było tak, że to zdający popełniali poważne błędy w dowodach. Taka sytuacja ma miejsce na przykład w zadaniu 31., w którym jest 48,1% „zer". A jest to przecież gimnazjalny problem z geometrii płaskiej, w którym barierą nie do przeskoczenia dla wielu zdających okazało się wyciągnięcie poprawnego wniosku co do podziału trapezu na trójkąt równoboczny i prostokątny – zdający nader często rysowali trójkąt równoboczny i trójkąt prostokątny równoramienny (!).

W zadaniu 33. sytuacja jest podobna. 49,5% zdających nie potrafi poprawnie rozpocząć zadania z rachunku prawdopodobieństwa, w którym jest rozważany dwukrotny rzut kostką do gry. Tylko co piąty maturzysta zdobył w tym zadaniu komplet punktów – czyżby to oznaczało, że tylko niewiele ponad połowę maturzystów opanowało umiejętność obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia losowego w bardzo typowym doświadczeniu losowym – zwróćmy także uwagę na liczebności grup osób, które uzyskały 2 lub 3 punkty w tym zadaniu: 2,1% oraz 4,4%.

I jeszcze trzy diagramy na zakończenie tej części.

Diagram 11. zawiera wskaźniki łatwości wszystkich zadań w arkuszu dla poziomu podstawowego, obliczone z podziałem na trzy typy szkół: licea ogólnokształcące, licea profilowane oraz technika. W mocy pozostają wcześniejsze spostrzeżenia, co do wyższej skuteczności zdających z liceów ogólnokształcących. Różnice między wskaźnikami łatwości sięgają od kilku (na przykład w zadaniu 13.) do kilkudziesięciu punktów procentowych (na przykład w zadaniu 31.)

Interesujące mogą być kolejne dwa diagramy: 12. i 13. Ilustrują bowiem zależność średniego wyniku zdających osiągniętego w zadaniach zamkniętych (Diagram 12.) od wyniku tych zdających w zadaniach otwartych i na odwrót (Diagram 13.). Kształty linii trendu różnią się wypukłością, co ilustruje siłę tych zależności oraz wyznacza różne długości odcinków (wyników) na osi poziomej przy wybranym wyniku z osi pionowej.

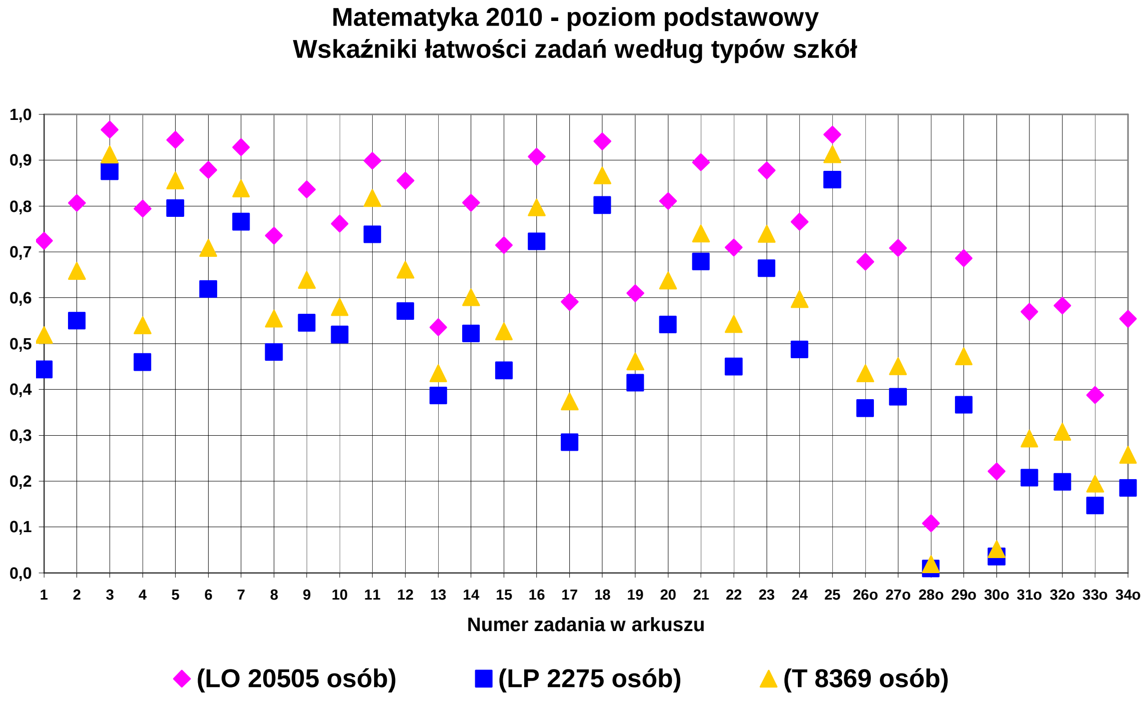



Diagram 11. Wskaźniki łatwości zadań

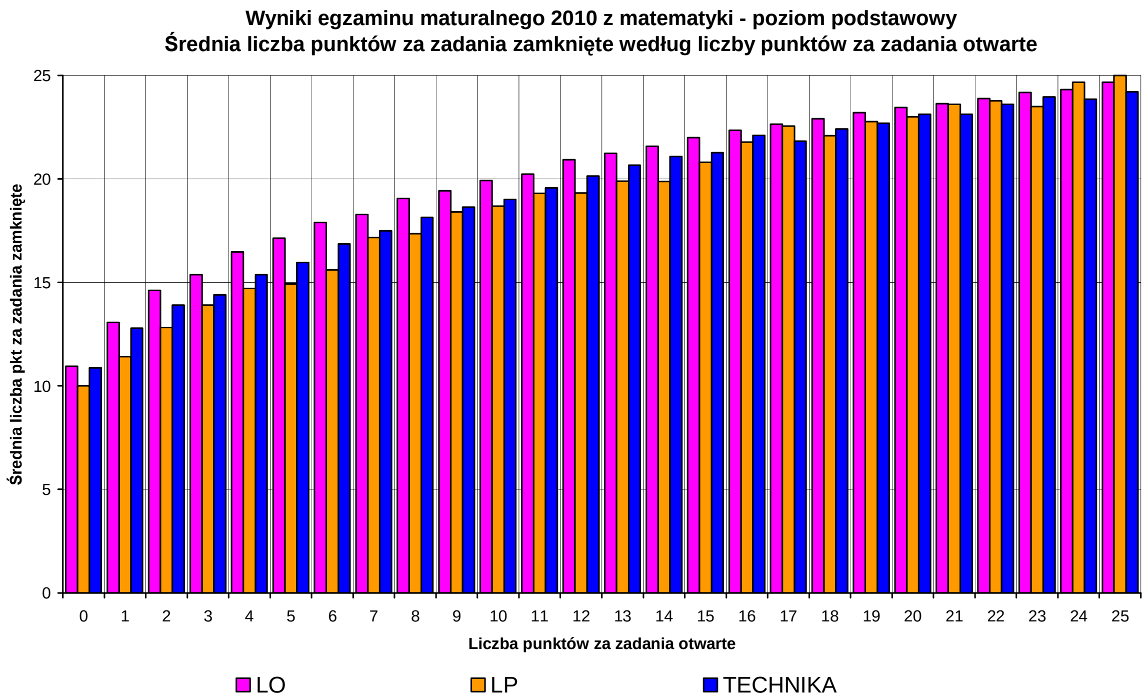



Diagram 12. Średnia liczba punktów w zadaniach zamkniętych w zależności od liczby punktów za zadania otwarte

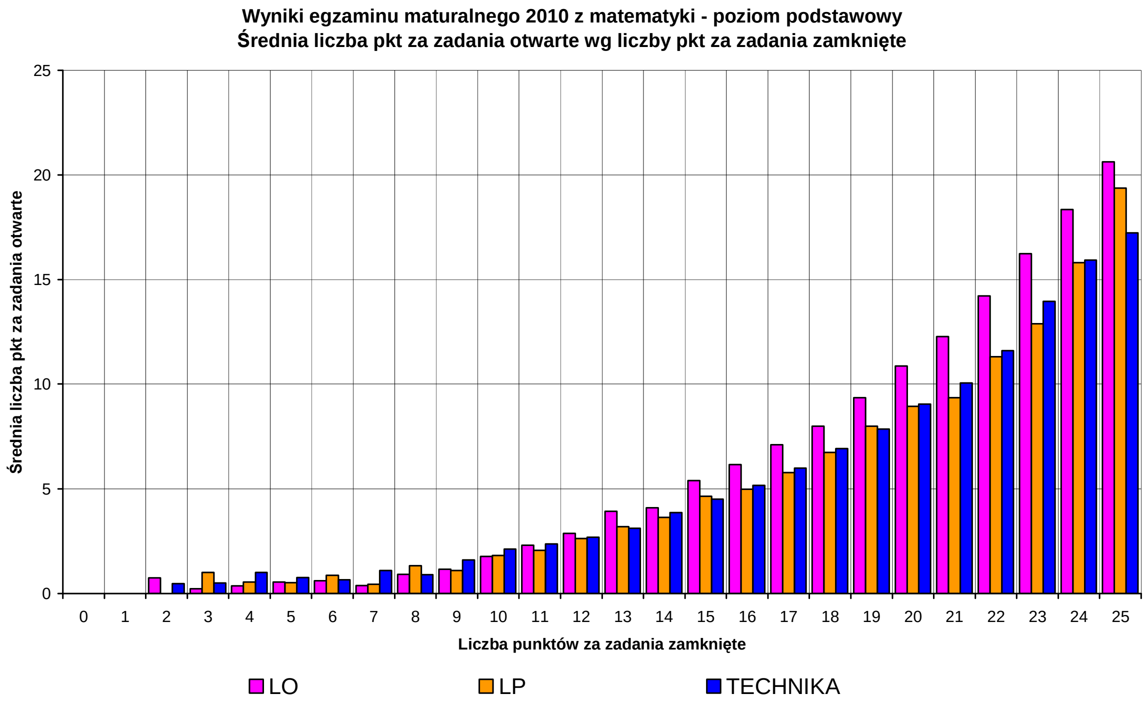



Diagram 13. Średnia liczba punktów w zadaniach otwartych w zależności od liczby punktów za zadania zamknięte

## Poziom rozszerzony

Zdający egzamin maturalny z matematyki wybranej jako przedmiot dodatkowy (poziom rozszerzony egzaminu) uzyskali średni wynik procentowy równy 46,6%. Tym samym arkusz (por. klasyfikację B. Niemierki) dla tego poziomu był dla maturzystów trudny. Wpływ na taki wynik ma oczywiście stopień trudności każdego zadania jak również fakt, że zadania w arkuszu badały umiejętności opisane w obszarach trzech najwyższych standardów (MOD, STR, ROZ), zaś bazą treściową dla nich były niemal wszystkie działy podstawy programowej.

Odchylenie standardowe od średniego wyniku punktowego jest tutaj dwukrotnie większe niż w przypadku arkusza z poziomu podstawowego; równa się 12,57 punktu i oznacza, że wyniki punktowe z przedziału $\langle 10, 35 \rangle$ punktów egzaminacyjnych osiągnęło prawie 63% zdających. Mediana wyników ma wartość 22 punktów.

Bezbłędne rozwiązania (zob. diagram 14.) wszystkich 11 zadań z arkusza znaleziono w pracach 21 zdających, 15 zdających „zgubiło" zaledwie jeden punkt w swoich rozwiązaniach. Na drugim biegunie jest grupa 65 zdających, którzy na ten egzamin przyszli pewnie z ciekawości, bo nie zdołali uzyskać choćby jednego punktu, mimo iż 6 zadań w tym arkuszu to zadania dość typowe dla tego poziomu egzaminu (zadanie 1. – nierówność z wartością bezwzględną, zadanie 2. – równanie trygonometryczne, zadanie 4. – wielomian, zadanie 5. – funkcja kwadratowa z parametrem, zadanie 6. – ciągi liczbowe i zadanie 11. – objętość ostrosłupa).

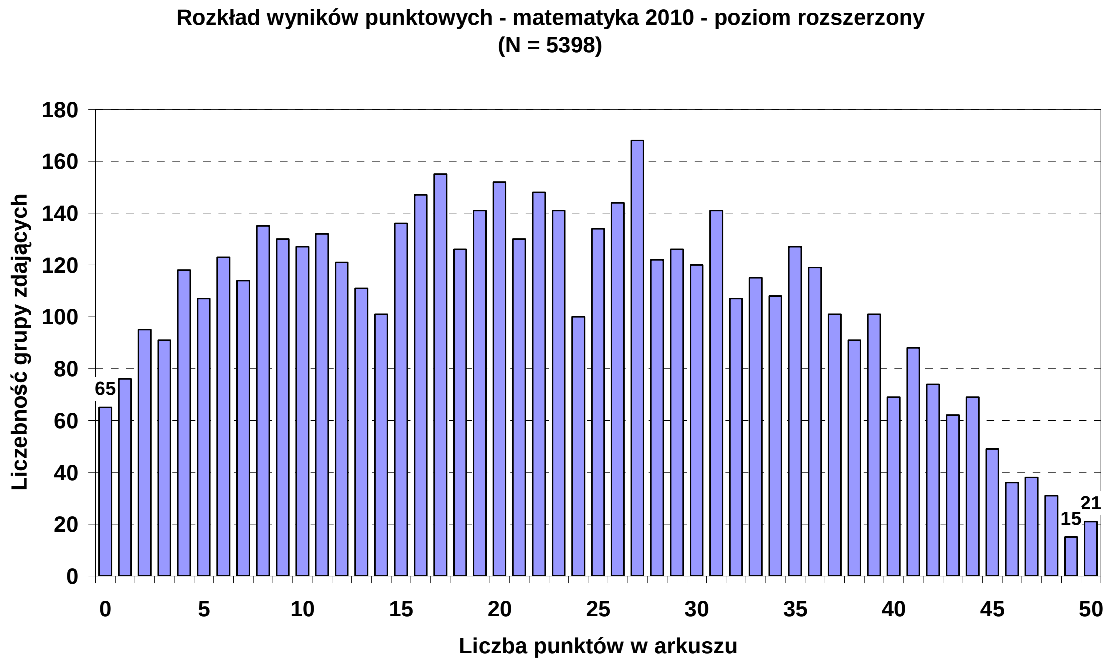



Diagram 14. Poziom rozszerzony egzaminu maturalnego z matematyki – rozkład wyników punktowych

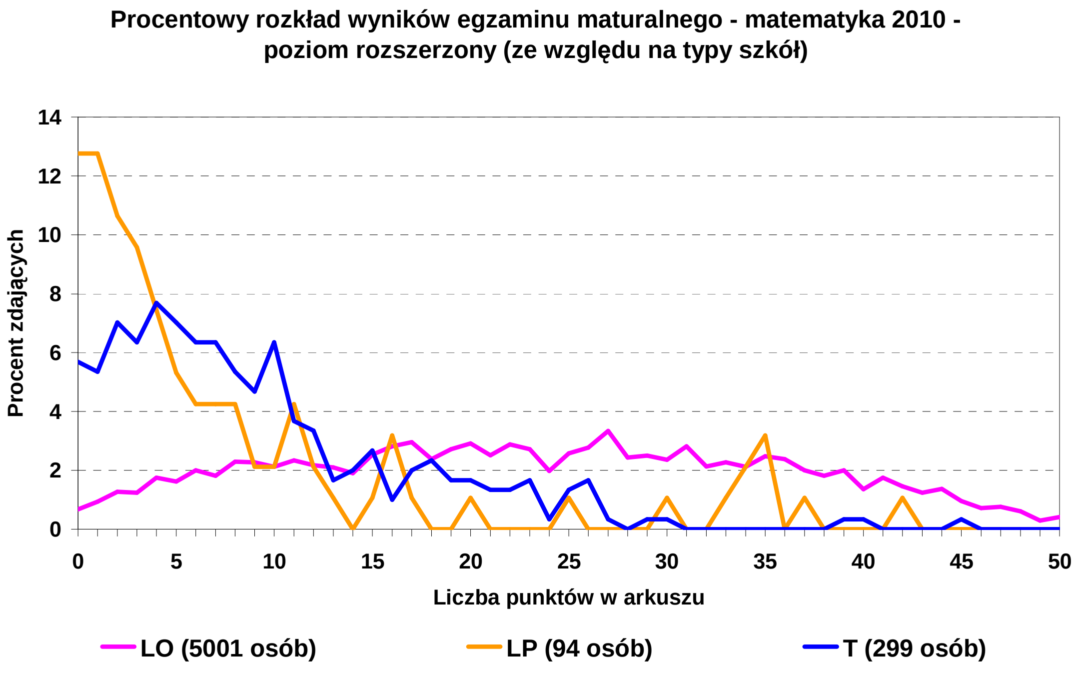



Diagram 15. Poziom rozszerzony – rozkład wyników punktowych w poszczególnych typach szkół

Diagram 15. ilustruje rozkład wyników tego egzaminu w poszczególnych typach szkół ponadgimnazjalnych (wykres nie uwzględnia trzech maturzystów z liceów uzupełniających oraz jednego maturzysty z technikum uzupełniającego). Niewielka liczebność grupy zdających z liceów profilowanych oraz techników czteroletnich, w porównaniu z grupą maturzystów z liceów ogólnokształcących, powoduje, że liniowe wykresy w kilku miejscach mają wyraźną własność skoku.

Wszystkie maksymalne wyniki na egzaminie są dziełem maturzystów z LO, choć i w tej grupie są zdający, którzy nie uzyskali żadnego punktu (było ich 34, wobec 12 zdających z liceów profilowanych czy też 17 zdających z techników). Uwagę zwraca symetryczny kształt wykresu wyników egzaminu w grupie zdających z LO.

W Tabeli 8. zebrano z kolei wskaźniki łatwości zadań z arkusza.

Tabela 8. Poziom rozszerzony – wskaźniki łatwości zadań

| Obszar | Numer zadania w arkuszu | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
| Okręg OKE | 0,52 | 0,67 | 0,29 | 0,67 | 0,75 | 0,54 | 0,36 | 0,22 | 0,51 | 0,27 | 0,19 |
| woj. dolnośląskie | *0,52* | *0,66* | *0,28* | *0,66* | *0,74* | *0,54* | *0,35* | *0,21* | *0,49* | *0,27* | *0,19* |
| woj. opolskie | *0,53* | *0,69* | *0,31* | *0,68* | *0,78* | *0,55* | *0,39* | *0,23* | *0,55* | *0,28* | *0,21* |

Tylko zadanie 5. (ciągi liczbowe) było dla zdających w naszym okręgu łatwe. Pięć zadań: 1., 2., 4., 6. oraz 9. okazały się umiarkowanie trudne. Pozostałych pięć zadań (3., 7., 8., 10. oraz 11.) były zadaniami trudnymi. Zaskakująco niską skuteczność osiągnęli maturzyści w zadaniu 11. Dość typowe zadanie ze stereometrii – wyznaczenie objętości prawidłowego ostrosłupa trójkątnego, przy danym kącie dwuściennym oraz danej długości krawędzi podstawy i jedynie 19% zdobytych punktów. Nawet zadania na dowodzenie (8. i 9.) nie mają tak niskich wskaźników. Czy wpływ na wielkość tego wskaźnika miał fakt, że to zadanie było ostatnie w arkuszu?

Trzeba ponadto odnotować, że maturzyści z województwa opolskiego w każdym zadaniu z tego arkusza byli bardziej skuteczni od maturzystów z województwa dolnośląskiego. Maturzystów z Opolszczyzny było co prawda prawie czterokrotnie mniej niż maturzystów z województwa dolnośląskiego, niemniej Ich skuteczność na przykład w zadaniu 9. (dowód geometryczny) jest imponująca i sięga 6 punktów procentowych.

I jeszcze jedna ilustracja (Diagram 16.) wskaźników łatwości zadań z tego arkusza. Tym razem porównanie tych wskaźników w poszczególnych trzech typach szkół. Nietrudno zauważyć, że maturzystom z LO łatwiej przychodziło rozwiązywać wszystkie zadania z tego arkusza. Różnice w skuteczności między nimi i maturzystami z liceów profilowanych oraz techników czteroletnich sięgają więcej niż 30 punktów procentowych w pięciu spośród sześciu początkowych zadań z tego arkusza: 1., 2., 4., 5. oraz 6. Co ciekawe, najmniejsza z tych różnic dotyczy zadania 10. (rachunek prawdopodobieństwa) – okazało się, że trudne do wymyślenia dla każdego maturzysty na egzaminie są strategie rozwiązania problemu kombinatorycznego.

Wskaźniki łatwości zadań warto zawsze skonfrontować z wynikami badania frakcji opuszczeń poszczególnych zadań w tym arkuszu (Tabela 9.).

Dane powyższe pokazują, że problematyka zadań nie była obca maturzystom. Najwyższa wielkość opuszczeń, 10% w zadaniu 8., mogła być spowodowana złączeniem w jednym zadaniu dwóch umiejętności: przeprowadzenia dowodu oraz wykorzystania pewnych własności wykresu (dość chyba rzadko rozważanej na lekcjach) funkcji potęgowej o równaniu $y = \frac{1}{x^2}$.

Warto dołączyć do dwóch powyższych zestawień jeszcze rozkład poszczególnych punktów uzyskiwanych przez zdających we wszystkich zadaniach (Tabela 10.) z arkusza. Łącznie jest to w miarę pełny zbiór danych pozwalających wnioskować o kłopotach zdających. Nie wolno zapominać o schemacie (nieczynnościowym, holistycznym) oceniania zadań z tego arkusza (jest dostępny na stronie CKE, www.cke.edu.pl), szczególnie w trakcie analizowania kolejnych etapów rozwiązania każdego zadania otwartego.

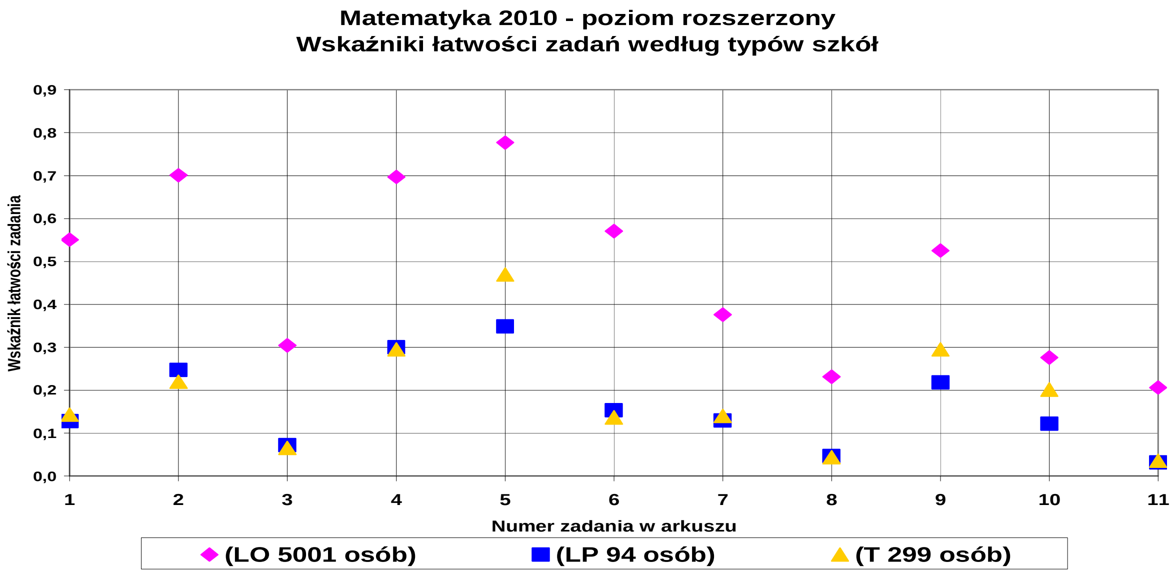



Diagram 16. Poziom rozszerzony – wskaźniki łatwości zadań w poszczególnych typach szkół

Tabela 9. Poziom rozszerzony – frakcje opuszczeń zadań

| | Numer zadania w arkuszu | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
| Opuszczenia | 0,9% | 5,5% | 0,8% | 1,5% | 1,2% | 3,2% | 0,7% | 10% | 6,1% | 6% | 3,5% |

Tabela 10. Poziom rozszerzony – rozkład punktów uzyskiwanych w poszczególnych zadaniach

| Uzyskane punkty | Numer zadania w arkuszu | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. |
| 0 pkt | 28,5% | 19,1% | 65,3% | 6,9% | 6,6% | 26,3% | 33,5% | 66,2% | 19,4% | 23,3% | 53,8% |
| 1 pkt | 6,7% | 4,8% | 3% | 29,6% | 10,1% | 15% | 14,3% | 6,2% | 30% | 62,7% | 18,4% |
| 2 pkt | 22,5% | 10,3% | 3,9% | 2,4% | 8,6% | 6,1% | 22,5% | 3,4% | 8,8% | 4,5% | 15,9% |
| 3 pkt | 12,9% | 22,2% | 7,3% | 11,9% | 3,6% | 6,2% | 4,2% | 10,9% | 12% | 2,1% | 4,5% |
| 4 pkt | 29,4% | 43,6% | 20,5% | 49,2% | 17,3% | 8,4% | 2% | 3,3,% | 29,8% | 7,5% | 4,1% |
| 5 pkt | | | | | 53,7% | 38% | 5,6% | 9,9% | | | 3,4% |
| 6 pkt | | | | | | | 17,8% | | | | |

Poniżej podano przykładową analizę z udziałem powyżej przedstawionych danych w odniesieniu zadania 1. Oto treść tego zadania:

„Rozwiąż nierówność $|2x+4|+|x-1|\le 6$."

Z tabeli 10. odczytujemy, że 28,5% zdających otrzymało 0 punktów za swoje rozwiązanie.

Z tabeli 9. dowiadujemy się, że 0,9% wszystkich zdających opuściło to zadanie – egzaminatorzy oczywiście przyznali im 0 punktów.

Oznacza to, że 27,6% zdających nie potrafiło w tym zadaniu uzyskać 1 punktu. Schemat oceniania nazywa ten pierwszy punkt jako dokonanie **istotnego postępu**, a było nim:

albo

wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$

albo

zapisanie czterech przypadków: $\begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ x-1< 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4< 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4< 0 \\ x-1< 0 \end{cases}$

Zatem, co trzeci zdający naprawdę nie potrafi poprawnie rozpocząć rozwiązywania tego typowego dość zadania. Jak radzi sobie pozostałe 72,5% zdających w tym zadaniu? 6,7% wszystkich zdających dokonało istotnego postępu w tym zadaniu, czyli wyróżniło na osi liczbowej trzy przedziały lub zapisało cztery przypadki i na tym zakończyło swoje rozwiązanie lub popełniło w dalszej części rozwiązania błędy. Oznacza to także, iż znaczna część zdających (64,8%=22,5%+12,9%+29,4%), w rozwiązaniach których był istotny postęp wiedziała, co należy dalej zrobić. 22,5% zdających otrzymało za rozwiązanie 2 punkty, czyli pokonało **zasadnicze trudności** tego zadania, które w schemacie zostały opisane jako „zapisanie nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in(-\infty,-2),\quad -2x-4-x+1\leq 6$

II. $x\in\langle -2,1),\quad 2x+4-x+1\leq 6$

III. $x\in\langle 1,\infty),\quad 2x+4+x-1\leq 6$

Niemal co trzeci zdający (29,4%) zaprezentował rozwiązanie pełne, czyli poprawnie i do końca rozwiązał to zadanie. Tę grupę zdających można uzupełnić o 12,9% tych maturzystów, którzy **rozwiązali zadanie do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania**, to znaczy w trakcie rozwiązywania poszczególnych nierówności popełnili drobne błędy rachunkowe lub błędy spowodowane nieuwagą przy przepisywaniu.

Teraz wypada zachęcić i poprosić Państwa o przeprowadzenie analizy podobnej do powyższej w odniesieniu do pozostałych dziesięciu zadań z arkusza.

## 4. Oczywista oczywistość, czyli o dowodzeniu na obowiązkowej maturze z matematyki

28 sierpnia 2010 roku mijają 3 lata od dnia, w którym Minister Edukacji Narodowej, pan Ryszard Legutko podpisał rozporządzenie w sprawie standardów wymagań egzaminacyjnych będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów (Dz. U. z 2007 r., Nr 157, poz. 1102), w którym znalazł się opis nowej struktury standardów z matematyki.

Jaki był cel zmiany struktury standardów? Z pewnością chodziło o wyróżnienie ważnych dla matematyki umiejętności. Jeżeli przypomnimy poprzedni układ standardów:

standard I. wiadomości i rozumienie,
standard II. korzystanie z informacji,
standard III. tworzenie informacji,

to oczywiście opisują one ogólne umiejętności, które w szczególności mogą ukierunkować pracę nauczycieli w szkole. Ten opis z racji swej ogólności nadaje się do większości przedmiotów szkolnych, które kończą się egzaminem na maturze.

Matematykom taki opis nie wystarczał. Zespół pod kierunkiem prof. Zbigniewa Marciniaka postawił sobie zadanie opisania struktury czy też hierarchii ogólnych umiejętności matematycznych, rzeczywiście kształconych w polskich szkołach ponadgimnazjalnych, których poziom opanowania mógłby zostać sprawdzony na egzaminie maturalnym z matematyki. Efektem prac zespołu jest wspominane wyżej rozporządzenie. Znajdujemy tam hierarchię pięciu standardów wymagań egzaminacyjnych.

Zdający posiada umiejętności w zakresie:

| POZIOM PODSTAWOWY | POZIOM ROZSZERZONY |
|---|---|
| 1. wykorzystania i tworzenia informacji | |
| interpretuje tekst matematyczny i formułuje uzyskane wyniki | używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników |
| 2. wykorzystania i interpretowania reprezentacji | |
| używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych | rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne i operuje obiektami matematycznymi |
| 3. modelowania matematycznego | |
| dobiera model matematyczny do prostej sytuacji | buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia |
| 4. użycia i tworzenia strategii | |
| stosuje strategie, która jasno wynika z treści zadania | tworzy strategię rozwiązania problemu |
| 5. rozumowania i argumentacji | |
| prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków | tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność |

Uwagę zwraca zapis „zdający posiada umiejętności w zakresie:”. Jest to forma zobowiązania, które przyjmuje na siebie szkoła kończąca się maturą, wyposażenia każdego ucznia w opisane ogólne umiejętności matematyczne. W dalszej części rozporządzenie zawiera znakomity zabieg w postaci zwrotu: „zdający demonstruje poziom opanowania powyższych umiejętności, rozwiązując zadania, w których:” po czym następuje lista wszystkich haseł podstawy programowej matematyki, ujętych w formę konkretnych operacji matematycznych. Tak oto bazą treściową dla umiejętności ogólnych, nazwanych standardami, stała się aktualnie obowiązująca podstawa programowa matematyki.

Na zakończenie tego wstępu warto przypomnieć, że kierownictwo Ministerstwa od trzech lat niezmiennie powtarza, że na obowiązkowym egzaminie maturalnym z matematyki, także na poziomie podstawowym, będzie sprawdzany poziom opanowania wszystkich umiejętności opisanych w standardach, w szczególności trzech najwyższych standardów, tzn. modelowania, strategii oraz rozumowania. Zaś Centralna Komisja Egzaminacyjna, zgodnie ze swoimi statutowymi zadaniami, opublikowała *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od 2010 roku*, w którym zamieszczono między innymi przykładowe arkusze egzaminacyjne, ilustrujące wymagania egzaminacyjne opisane w *Informatorze*.

W poniższym tekście zaprezentowano zadania z arkuszy egzaminacyjnych z matematyki ilustrujące standard V – rozumowania i argumentacji. Nie tylko same zadania, ale i wnioski z analizy wyników tych zadań, po kryterialnej ocenie rozwiązań tych zadań dokonanej przez egzaminatorów. Dlaczego dokonano takiego wyboru? Dlatego że są to najtrudniejsze umiejętności matematyczne, dlatego że do tej pory pojawianie się więcej niż jednego zadania na dowodzenie w arkuszu nie było regułą, szczególnie zaś w arkuszu dla poziomu podstawowego. Zewnętrzny egzamin daje zaś szansę oglądu, jak dziewiętnastoletni kandydat do podjęcia studiów wyższych radzi sobie z kompletowaniem argumentów do udowodnienia tezy sformułowanej w treści zadania.

I jeszcze jeden powód. Przed obowiązkową maturą z matematyki, w Internecie pojawiło się wiele witryn poświęconych matematyce szkolnej, wiele forów, na których uczniowie wspólnie uczą się, opisują pomysły na rozwiązania zadań. Na jednym z takich forów można znaleźć następujący wpis:

> „Udowodnij, że jeżeli q nie jest kwadratem liczby naturalnej, to $\sqrt{q}$ jest liczbą niewymierną ($q \in N$)".
>
> Kompletnie nie wiem, jak to napisać, tak matematycznie, bo taka rzecz jest oczywista. Jak udowodnić taką oczywistość ?

Wygląda na to, że uczeń jest zaskoczony zadaniem domowym, które otrzymał. Pewnie też zobaczył na kilku przykładach, czego twierdzenie dotyczy, być może nawet w zeszycie znalazł dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$ (czy może $\sqrt{3}$) i jest w kłopocie, bo teraz należałoby uogólnić pewne spostrzeżenia. Musi pokazać, że to zdanie jest prawdziwe dla nieskończenie wielu obiektów. Pewnie w duchu zadaje sobie pytanie: tylko po co, skoro to widać, skoro to jest oczywiste? Nie dość tego, argumenty w dowodzie trzeba jeszcze spisać i ustawić tak, aby każdy krok dowodu wynikał jasno z poprzednich (albo był aksjomatem!).

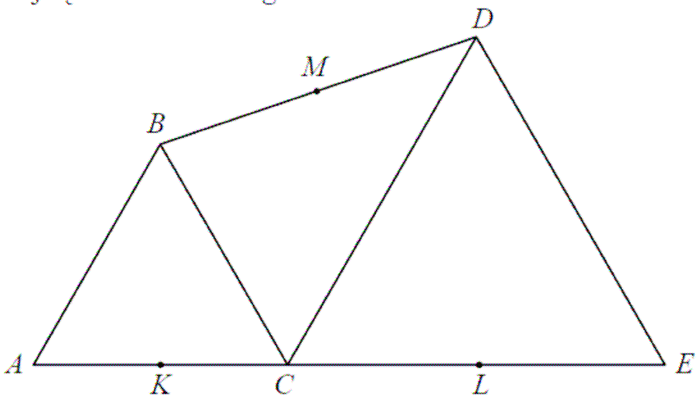
W nauczaniu matematyki może być wiele takich sytuacji, w których naturalne jest zadawanie pytań w rodzaju: a dlaczego sądzisz, że tak jest? jak myślisz, czy zawsze to jest prawdą? jak powinien wyglądać zapis naszych racji, aby ktoś inny mógł ocenić ich poprawność? Nauczyciel nie musi wtedy zadawać sobie pytania: czy moi uczniowie już odczuwają potrzebę dowodu?

Jesienią 2009 roku, w rozmowach z nauczycielami na konferencjach, w korespondencji codziennej z egzaminatorami dawało się odczuć napięcie, z jakim wyczekiwano na arkusz egzaminacyjny przygotowywany przez CKE na próbny egzamin maturalny z matematyki. Miała to być (i była) próba generalna, pierwszego po 27 latach, obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki. W tym arkuszu, wśród 34 zadań, zgodnie z zapowiedziami, były dwa zadania sprawdzające umiejętności prowadzenia rozumowań i argumentacji – jeden dowód algebraiczny i jeden dowód geometryczny. Treści tych zadań są następujące:

**Zadanie 30.** (*2 pkt*)

Wykaż, że dla każdego $m$ ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny.

**Zadanie 31.** (*2 pkt*)
Trójkąty $ABC$ i $CDE$ są równoboczne. Punkty $A$, $C$ i $E$ leżą na jednej prostej. Punkty $K$, $L$ i $M$ są środkami odcinków $AC$, $CE$ i $BD$ (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty $K$, $L$ i $M$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.




Jakie były wyniki zdających? Odpowiedź jest krótka: złe.

Po pierwsze dlatego, że skuteczność maturzystów w uzyskiwaniu punktów za te zadania, mierzona wskaźnikiem łatwości, była bardzo niska i wynosiła 0,22 w zadaniu 30. i 0,01 (!) w zadaniu 31.

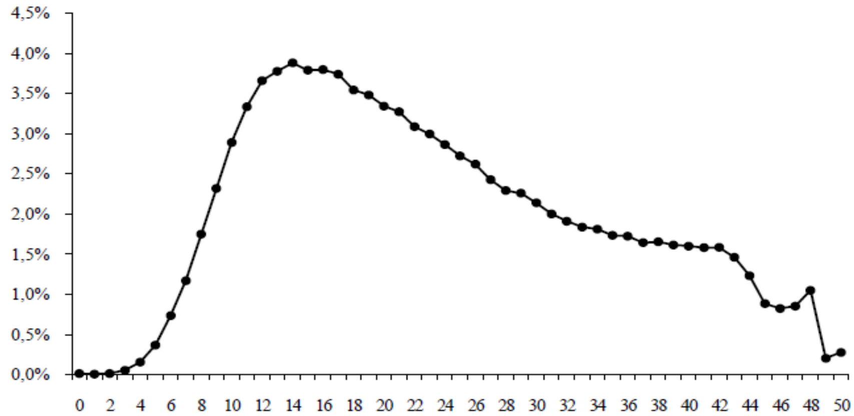
Po drugie dlatego, że odpowiednio 36% i 43% maturzystów w ogóle nie podjęło próby rozwiązania zadania 30. i 31.

Po trzecie dlatego, że w rozwiązaniach zdających, zauważono, oprócz zwykłych lapsusów językowych, przytrafiających się każdemu przy pisaniu tekstów, wiele fauli, które popełnili w swoich „dowodach".

Faule zdających były widoczne szczególnie w rozwiązaniach zadania 31. Na przykład wtedy, gdy zdający zapisywał bez próby uzasadnienia, że trójkąt $KLM$ jest równoramienny (zakładał po prostu, że spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka $M$ dzieli podstawę $KL$ na połowy). Albo wtedy, gdy zdający rozpoczynał rozwiązanie od wyboru środka $S$ odcinka $BC$, a następnie bez dowodu, korzystał z tego, że punkty $K$, $S$ i $M$ są współliniowe. Zdający faulowali również wtedy, gdy zakładali (bez żadnej próby uzasadnienia), że długość sumy dwóch wektorów jest sumą długości tych wektorów – brakowało odwołania się do równoległości wektorów oraz zgodności ich zwrotu. I wreszcie największe odkrycie podczas tamtej próby – „każdy czworokąt wypukły jest trapezem" (!). Najczęściej bowiem popełnianym w tym zadaniu błędem było nieprawidłowe użycie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa. Zdający zaczynali od razu od stwierdzenia, że skoro punkty $M$ i $K$ są środkami boków $BD$ i $AC$, to odcinek $MK$ jest równoległy do boków $AB$ i $CD$.

W schemacie oceniania tego zadania opisano 4 sposoby jego rozwiązania. Konstrukcja schematu tylko w jednym przypadku pozwalała na przyznanie 1 punktu z 2 możliwych w tym zadaniu – wtedy, gdy podany w treści zadania rysunek zdający umieści w układzie współrzędnych i opisze współrzędne wierzchołków K, L, M w zależności od długości boków trójkątów ABC i CDE i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy. W odniesieniu do pozostałych trzech sposobów rozwiązania tego zadania została podjęta decyzja o tym, aby punktować zadanie 31. na zasadzie „wszystko albo nic", 2 punkty albo 0 punktów. Innymi słowy, dowód w matematyce musi być „nieprzemakalny" – w przeciwnym wypadku przestaje być dowodem. Nie można traktować fałszu w dowodzie podobnie jak błędu rachunkowego, czy nawet merytorycznego w innym typie zadania.

Każde z zadań na dowodzenie było wycenione na dwa punkty, zaś ich funkcja od początku była dość jasna – powinny różnicować całą populację zdających. Między innymi dlatego zrezygnowano z dowodów punktowanych wysoko (dowód geometryczny w przykładowym arkuszu zamieszczonym w *Informatorze* był jeszcze punktowany w skali 0-5), bo więcej punktów groziło zdającym większą stratą. Efekt zróżnicowania wyników i tak był znakomicie widoczny. Wykres, który ilustruje rozkład wyników surowych w całym kraju (zob. poniżej wykres pobrany ze strony www.cke.edu.pl) jest bardzo czytelny z prawej strony osi *Ox* (zob. „skok" dla $x = 49$). Można nawet zaryzykować twierdzenie, że uzyskanie przez zdającego 49 lub 50 punktów na tym egzaminie zależało wprost od oceny uzyskanej za rozwiązanie zadania 31.




I jeszcze kilka słów o błędach popełnionych przez zdających w zadaniu 30. Kontekst zadania był jasny i oswojony, mimo polecenia „wykaż, że", więc pewnie dlatego zdający chętniej podejmowali próby jego rozwiązania. I okazywało się niestety, że najczęstszym błędem było sprawdzanie warunków zadania dla kilku wybranych wartości $m$ i na podstawie tych obliczeń formułowanie wniosku, że dany ciąg jest arytmetyczny. Nierzadkie były również próby przeprowadzenia „dowodu indukcyjnego". Te dwa typy błędów dotyczyły samego „ataku" zadania. Natomiast, co do jakości narzędzi dowodu, to okazało się, że nawet znajomość poprawnej metody dowodu nie gwarantowała sukcesu – niektórzy zdający „polegli" w wyniku błędów rachunkowych; koniec końców musieli przebrnąć przez działania na ułamkach zwykłych (!). O czytaniu ze zrozumieniem jest głośno nie tylko na matematyce, więc i tu należy odnotować ten typ błędu – część zdających „dowodziła", że podany ciąg jest geometryczny. I ostatni typ błędu, o którym koniecznie trzeba wspomnieć. Niektórzy zdający otrzymywali tożsamość bezwarunkową i nie potrafili jej poprawnie zinterpretować. Inni zaś popełniali w dowodzie błędy rachunkowe i po otrzymaniu jawnej sprzeczności zamiast wrócić i odnaleźć błąd, zapisywali wniosek, że „podany ciąg nie jest arytmetyczny" (*sic*!).

Po listopadowym próbnym egzaminie maturalnym Centralna i okręgowe komisje egzaminacyjne zrobiły wiele, aby upowszechnić wyniki egzaminu i rozmaite analizy tych wyników. OKE we Wrocławiu, na przykład, była organizatorem dwóch konferencji dla nauczycieli matematyki (11 stycznia 2010 r. we Wrocławiu i 12 stycznia 2010 r. w Opolu), których gościem specjalnym był prof. Wojciech Guzicki z Uniwersytetu Warszawskiego, pomysłodawca nieczynnościowego (holistycznego) schematu oceniania zadań otwartych. Około 250 uczestników obu konferencji miało okazję wysłuchać bardzo interesującego trzygodzinnego wykładu Profesora, między innymi, na temat maturalnych zadań sprawdzających umiejętność dowodzenia. Z pewnymi nadziejami system egzaminacyjny przygotowywał się zatem do majowego egzaminu.

W dniu 5 maja 2010 r., wśród 34 zadań w arkuszu egzaminacyjnym dla poziomu podstawowego, znalazły się, podobnie jak na próbie, dwa zadania na dowodzenie – jeden dowód geometryczny (zadanie 28.) oraz jeden dowód algebraiczny (zadanie 30.) Jakie były wyniki zdający w tych dwóch zadaniach?

wskaźnik łatwości: zadanie 28. 0,07, zadanie 30. 0,16,
opuszczenia: zadanie 28. 31% , zadanie 30. 20,2%,
rozkład uzyskiwanych punktów:

| Kolejne punkty uzyskane w zadaniu | Numer zadania w arkuszu | |
|---|---|---|
| | 28. | 30. |
| 0 pkt | 89,4% | 77,7% |
| 1 pkt | 6,4% | 13,3% |
| 2 pkt | 4,2% | 9% |

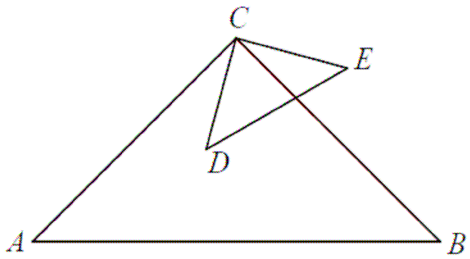
Pierwsze refleksje i porównania do listopadowej próbnej matury są następujące:

- zdający wykazali się większą skutecznością (o 6 punktów procentowych) przy dowodzie geometrycznym oraz niższą (także o 6 punktów procentowych) przy dowodzie algebraicznym.
- mniejsze są frakcje opuszczeń w obu zadaniach: o 12 punktów procentowych przy dowodzie geometrycznym oraz o 15,8 punktu procentowego przy dowodzie algebraicznym.

Ponadto, komplet punktów w obu zadaniach uzyskało 896 zdających (2,8% wszystkich zdających w naszym okręgu) uzyskało. Pora na bardziej szczegółową analizę wyników każdego zadania.

Zadanie 28.
Treść tego zadania, dla przypomnienia.

**Zadanie 28. (*2 pkt*)**
Trójkąty prostokątne równoramienne $ABC$ i $CDE$ są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku $C$ jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.




Jaki był cel tego zadania?

Przede wszystkim sprawdzenie, czy maturzyści potrafią skorzystać z przystawania trójkątów $ACD$ i $BCE$ (cecha bok-kąt-bok) do uzasadnienia równości odcinków $AD$ i $BE$.

Czego zatem oczekiwano od maturzystów?

Po pierwsze, że wskażą obydwa przystające trójkąty.

Po drugie, że uzasadnią to przystawanie, powołując się na cechę bok-kąt-bok co oznaczało, że wykażą równość: $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCE|$.

Po trzecie zaś, że wyprowadzą (i zapiszą) wniosek końcowy z przystawania trójkątów $ACD$ i $BCE$ o równości boków $AD$ i $BE$.

Schemat oceniania tego zadania był tym razem bardziej liberalny niż podczas próbnej matury, ponieważ dopuszczał przyznanie 1 punktu tym zdającym, którzy tylko wskażą i zapiszą, które trójkąty są przystające. Takich zdających było 6,4%. Niektórzy z nich zdobywali ten jeden punkt stosując nawet (!) twierdzenie cosinusów do trójkątów $ACD$ i $BCE$.

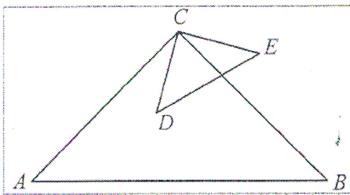
Zdecydowana większość zdających (89,4%) otrzymała 0 punktów za swoje rozwiązanie, skąd po uwzględnieniu frakcji opuszczeń, pozostaje nam 58,4% zdających, którzy rozpoczęli rozwiązywanie tego zadania i nie potrafili zdobyć nawet 1 punktu. Jakie błędy zostały popełnione? Przede wszystkim nazbyt często obserwowaliśmy „argumenty siłowe", czyli zapisy typu „odcinki $AD$ i $BE$ muszą być równe", bo, i tutaj był zapisywany jakiś fakt, na przykład „bo oba trójkąty mają wspólny wierzchołek $C$" – o których trójkątach myśleli, tego już zdający niestety nie pisali. Inny typ błędu powodujący wyzerowanie punktacji polegał na wykorzystaniu cechy $b$-$b$-$b$ przystawania trójkątów, cyt. „skoro te trójkąty mają 2 pary takich samych boków $|CE| = |CD|$ i $|AC| = |BC|$, to z tego wynika, na mocy cechy przystawania trójkątów „bok-bok-bok", że $|AD| = |BE|$ – trzecia para boków także jest równej długości". O „dowodach przez ogląd" – typu: „to widać z rysunku" wspomnimy tylko, że były takie. Martwić powinny też rozwiązania, w których zdający łączyli punkt $A$ z punktem $D$ i zapisywali, że trzy punkty: $A$, $D$ oraz $E$ leżą na jednej linii prostej. Poloniści nazywają takie rozwiązania „rozwiązaniami zawierającymi kardynalny błąd". Była jeszcze całkiem spora grupa zdających, którzy nie uzasadniwszy równości kątów $ACD$ i $BCE$ obracali trójkąt $CDE$ dokoła punktu $C$ tak, że trójkąty $ABC$ i $CDE$ były jednokładne – otrzymywali w ten sposób prezent w postaci trapezu równoramiennego $ABED$ – koniec (?) dowodu.

Tak więc grzechem głównym zdających stała się nieznajomość narzędzi dowodu geometrycznego – w tym wypadku cech przystawania trójkątów. Zresztą samo pojęcie przystawania było dość często mylone z podobieństwem trójkątów – nawet w rozwiązaniach, które zostały wypunktowane na maksymalną liczbę punktów. Uznawano bowiem za lapsus językowy sytuację, w której maturzysta poprawnie stosował cechę przystawania bok-kąt-bok i wyprowadzał z niej poprawne wnioski, mimo że nazwał przystawanie podobieństwem.

Z przyjemnością odnotowano 4,2% rozwiązań zadania 28., w których egzaminatorzy przyznali 2 punkty zdającym – były to rozwiązania eleganckie, krótkie, były też i porządnie przepracowane – ich autorzy starali się w każdym elemencie dowodu postawić przysłowiową „kropkę nad i". Ci zdający doskonali zrozumieli, czym jest dowód matematyczny – na maturze, pewnie już kolejny raz, pokazali, że swoje rozmyślania geometryczne potrafią zapisać w formie ciągu argumentów, celnych i w logicznie właściwej kolejności. Oto dwa przykładowe skany takich rozwiązań.

**Zadanie 28.** *(2 pkt)*

Trójkąty prostokątne równoramienne $ABC$ i $CDE$ są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku $C$ jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.




Weźmy trójkąty:
$\triangle ACD$ oraz $\triangle BCE$

Z warunków zadania wynika, że:
$|AC| = |BC|$ oraz $|CD| = |CE|$
($\triangle ACB$ oraz $\triangle DCE$ są równoramienne)

Ponadto oznaczmy $\sphericalangle ACD$ jako $\alpha$, $\sphericalangle BCE$ jako $\beta$ oraz $\sphericalangle DCB$ jako $\gamma$

Z warunków zadania wynika, że:

$\gamma + \beta = 90^\circ$ oraz $\alpha + \gamma = 90^\circ$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

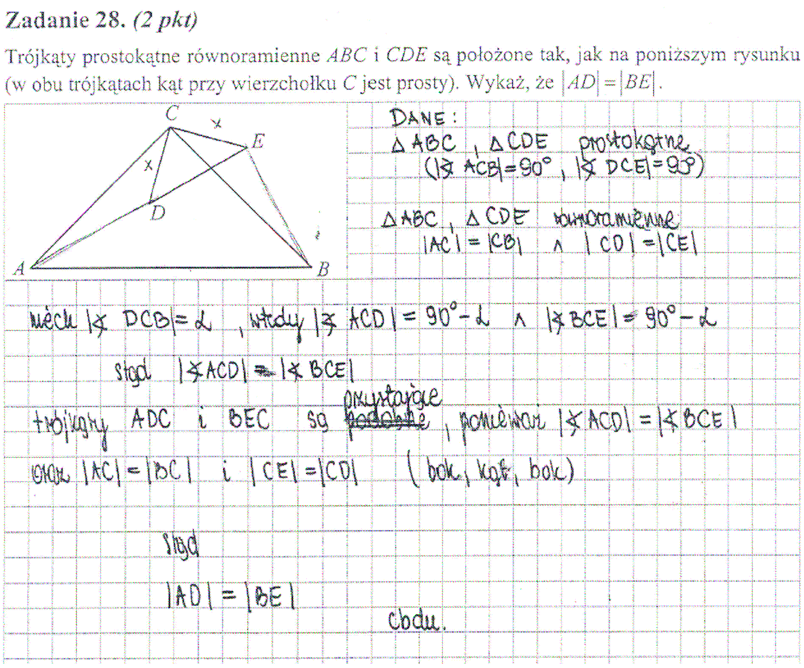
$\beta = 90^\circ - \gamma$ $\alpha = 90^\circ - \gamma$

$\alpha = \beta$

Kąty $\sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle BCE$ mają więc równe miary.
W takim razie z cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok trójkąty $\triangle ACD$ i $\triangle BCE$ są przystające.

Tym samym odpowiadające boki w tych trójkątach mają równe długości, w szczególności
$|AD| = |BE|$

CBDU.



**Zadanie 28.** *(2 pkt)*

Trójkąty prostokątne równoramienne $ABC$ i $CDE$ są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku $C$ jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



DANE:

$\Delta ABC$, $\Delta CDE$ prostokątne

($|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|\sphericalangle DCE| = 90°$)

$\Delta ABC$, $\Delta CDE$ równoramienne

$|AC| = |CB|$ $\wedge$ $|CD| = |CE|$

niech $|\sphericalangle DCB| = \alpha$, wtedy $|\sphericalangle ACD| = 90° - \alpha$ $\wedge$ $|\sphericalangle BCE| = 90° - \alpha$

stąd $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCE|$

trójkąty $ADC$ i $BEC$ są ~~podobne~~ przystające, ponieważ $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCE|$

oraz $|AC| = |BC|$ i $|CE| = |CD|$ (bok, kąt, bok)

stąd

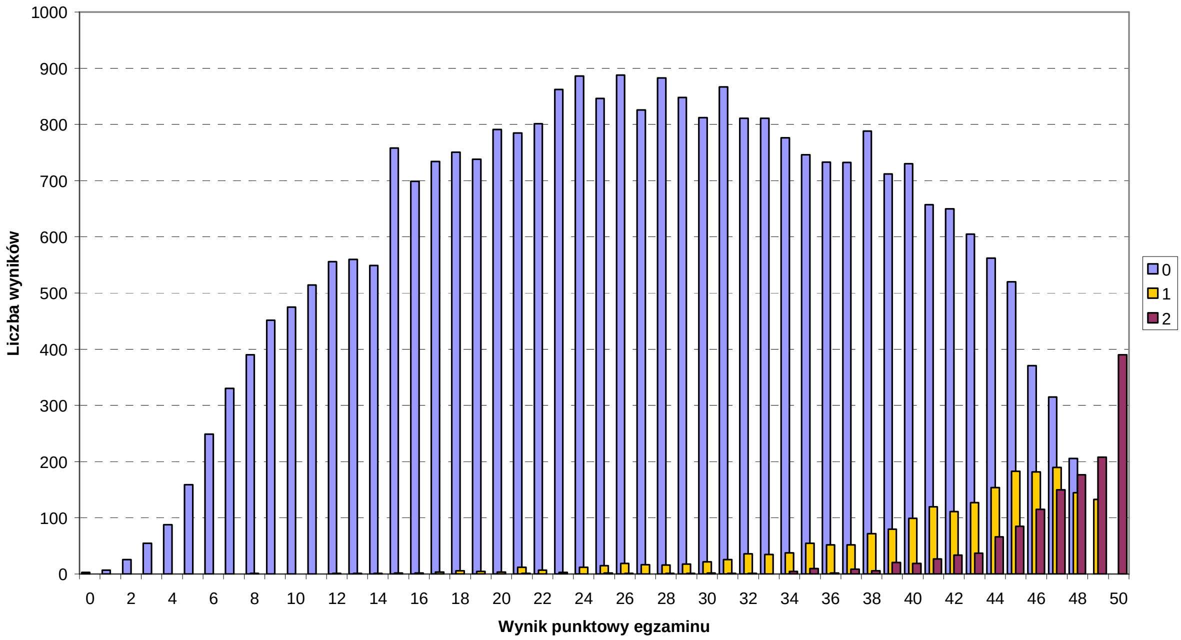
$|AD| = |BE|$

cbdu.

Na zakończenie akapitu poświęconego zadaniu 28. warto byłoby zilustrować na wykresie, jakie wyniki na egzaminie z matematyki osiągnęli zdający, którzy w tym zadaniu otrzymywali albo 0, albo 1, albo 2 punkty. Są tutaj dość wyraźne zależności.

Zdający, któremu w zadaniu 28. przyznano 2 punkty, na pewno uzyskiwał wynik egzaminu równy co najmniej 21 punktów z arkusza egzaminacyjnego. W dodatku, był tylko jeden zdający z takim wynikiem. Pozostali osiągnęli wynik co najmniej 28 punktów. Najliczniejsza (390 osób) jest grupa zdających, którzy uzyskali maksymalny wyniki na egzaminie.

**Wyniki egzaminu z matematyki a niektóre wyniki uzyskane w zadaniu 28.**



Z punktu widzenia holistycznego (nieczynnościowego) schematu oceniania, ważna jest obserwacja grupy zdających, którzy w tym zadaniu otrzymali 1 punkt. Ci zdający wiedzieli na czym polega sedno rozwiązania – pokonali przecież zasadnicze trudności zadania, ale nie potrafili poprawnie dokończyć rozwiązania. Okazuje się, że spośród takich zdających tylko 4 osoby nie zdały egzaminu. Ponadto, łącznie prawie 4,5% zdających, którzy uzyskali 1 punkt w zadaniu 28. osiągnęło na egzaminie od 40 do 49 punktów.

Zadanie 30.
Najpierw treść tego zadania.

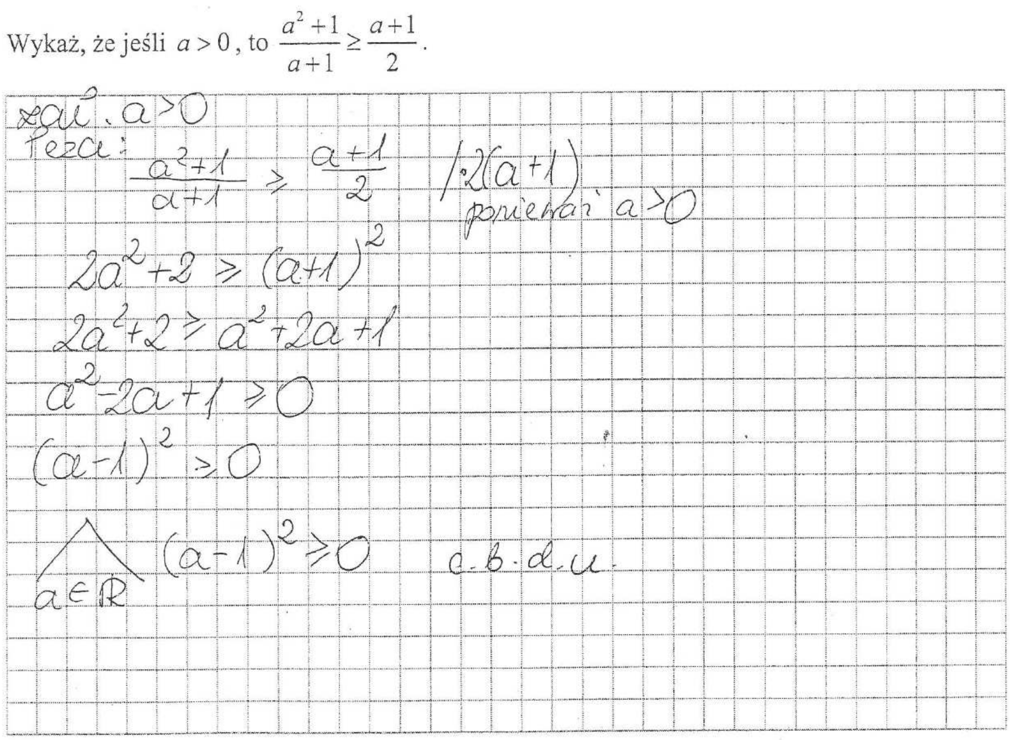
**Zadanie 30. (*2 pkt*)**

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

Jaki był cel tego zadania?

Oczywiście sprawdzenie, czy maturzyści potrafią przeprowadzić niezbyt trudny dowód nierówności algebraicznej. Maturzyści z naszego okręgu stosowali aż trzy rodzaje dowodu: redukcyjny, dedukcyjny oraz dowód niewprost. Tylko co siódmy maturzysta rozwiązujący zadania z arkusza dla poziomu podstawowego wybrał także poziom rozszerzony. Jednakże bardzo cieszy, że nauczyciele matematyki znaleźli czas na pokazanie trzech ważnych metod dowodzenia twierdzeń.

Najczęściej stosowanym dowodem był dowód redukcyjny, który polegał na równoważnym przekształcaniu tezy i doprowadzeniu do nierówności prawdziwej. Poniżej przykład zeskanowanego rozwiązania tym sposobem.


Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

zał. $a>0$

Teza: $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$ $\quad / \cdot 2(a+1)$ ponieważ $a>0$

$2a^2+2 \geq (a+1)^2$

$2a^2+2 \geq a^2+2a+1$

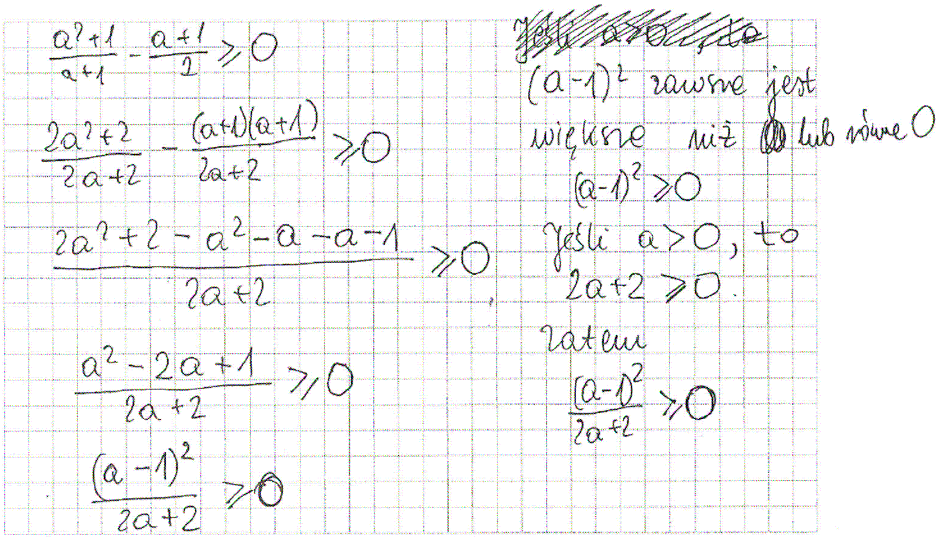
$a^2-2a+1 \geq 0$

$(a-1)^2 \geq 0$

$\bigwedge_{a\in\mathbb{R}} (a-1)^2 \geq 0$ c.b.d.u.

Uwagę zwraca skrupulatność zdającego. Zakres zmiennej został przez autorów zadania dobrany tak, aby nie zmuszać zdających do wprowadzania dodatkowego założenia, a mimo to przy mnożeniu obu stron nierówności i tak zostało zapisane „wytłumaczenie" dlaczego znak nierówności nie musi być zmieniony. Każdy krok tego dowodu jest przemyślany, nie ma tutaj zbędnego zapisu.

Inny przykład tego samego rodzaju dowodu ilustruje poniższy skan. Zdający poszedł nieco inną drogą – zamiast mnożyć obie strony nierówności przez iloczyn mianowników obu ułamków postanowił odjąć oba ułamki i wnioskować o znaku tego ułamka na podstawie analizy znaków licznika i mianownika.



$$\frac{a^2+1}{a+1} - \frac{a+1}{2} \geq 0$$

$$\frac{2a^2+2}{2a+2} - \frac{(a+1)(a+1)}{2a+2} \geq 0$$

$$\frac{2a^2+2-a^2-a-a-1}{2a+2} \geq 0$$

$$\frac{a^2-2a+1}{2a+2} \geq 0$$

$$\frac{(a-1)^2}{2a+2} \geq 0$$

~~Jeśli a>0, to~~

$(a-1)^2$ zawsze jest większe niż lub równe 0

$(a-1)^2 \geq 0$

Jeśli $a>0$, to $2a+2 > 0$.

zatem

$$\frac{(a-1)^2}{2a+2} \geq 0$$

9%, czyli prawie 3 000 maturzystów w naszym okręgu, otrzymało obydwa punkty za to zadanie. Wśród nich zdecydowana większość rozwiązywała tym właśnie sposobem. Wydaje się on bowiem niezwykle naturalny – znajomość tezy wręcz prowokuje do rozmaitych jej przekształceń.

Dlaczego zatem tylko 9% maturzystów doprowadza swoje rozwiązania do końca?

Pocieszające oraz warte podkreślenia jest to, że znacznie więcej osób miało szanse na oba punkty. Z tabeli ilustrującej rozkład punktów uzyskiwanych w tym zadaniu wiemy, że 13,3% zdających otrzymała za swoje rozwiązanie 1 punkt – co oznacza, że doprowadzili rozwiązanie do ważnego momentu (np. do postaci $a^2-2a+1 \geq 0$ lub $\frac{a^2-2a+1}{2(a+1)} \geq 0$) i zabrakło pomysłu na dokończenie rozumowania lub też w dalszej części wystąpiły błędy we wnioskowaniu.

Trudniejszą drogę wybrali zdający, którzy podjęli decyzję o przeprowadzeniu dowodu dedukcyjnego. Dowód taki polegał na przekształcaniu oczywistej nierówności do postaci tezy twierdzenia. Poniżej skan z przykładem takiego dowodu.

**Zadanie 30.** *(2 pkt)*

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

Zał.: $a > 0$

Teza: $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$

Dowód:

Prawdą jest że: $(a-1)^2 \geq 0$

$(a-1)^2 \geq 0$

$\Updownarrow$

$a^2-2a+1 \geq 0 \quad /+(a^2+2a+1)$

$\Updownarrow$

$2a^2+2 \geq a^2+2a+1$

$\Updownarrow$

$2(a^2+1) \geq (a+1)^2 \quad /:2$

$\Updownarrow$

$a^2+1 \geq \frac{(a+1)^2}{2} \quad /:a+1 \quad (a>0 \Leftrightarrow a+1>0)$

$\Updownarrow$

$\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$

C.N.D.

Mimo że nierówność nie należy do najtrudniejszych do udowodnienia, to z pewnością zdającemu należy się szacunek za umiejętność zaprezentowania w całości poprawnego dowodu i to w warunkach egzaminacyjnego stresu.

I najrzadziej obserwowany typ dowodu – niewprost. Zdający przypuszczali fałszywość twierdzenia i dowodzili, że takie założenie prowadzi do sprzeczności. Oto skan takiego rozwiązania. Znajomość mechanizmu tego dowodu jest oczywiście ściśle związana z rozumieniem własności implikacji. Zapewne ten zdający o godzinie 14.00, w dniu 5 maja, zmierzył się również z zadaniami z poziomu rozszerzonego.

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

załóżmy nie wprost, że $\frac{a^2+1}{a+1} < \frac{a+1}{2} \quad /\cdot 2(a+1)$, bo $a+1>0$

wtedy $2a^2+2 < a^2+2a+1$

tzn $a^2-2a+1 < 0$

$(a-1)^2 < 0$

sprzeczność, bo kwadrat liczby zawsze jest większy lub równy 0.

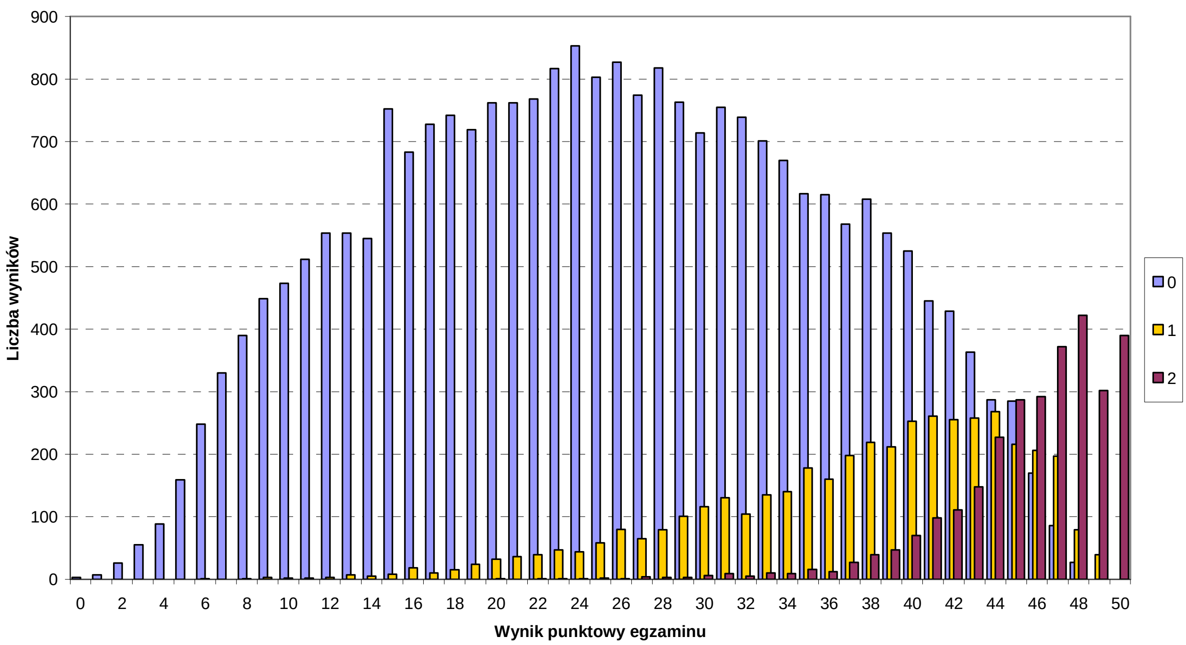
c.b.d.u.

Jak zatem skomentować 77,7% zer w zadaniu 30.?

Z pewnością należy zauważyć, że 20,2% zdających opuściło to zadanie. Pozostaje zatem 57,5% zdających, którzy rozpoczynali swoje rozwiązania i nie zdołali uzyskać nawet 1 punktu. Wśród nich byli tacy, którzy mieli „kłopoty z narzędziami" – popełniali błędy rachunkowe w początkowych przekształceniach (przy mnożeniu obu stron nierówności albo przy odejmowaniu ułamków) i często nie mieli szansy uzyskać dogodnej do wnioskowania postaci nierówności. Czasu na egzaminie nigdy nie jest za dużo, a i cierpliwości do szukania własnych błędów wszystkim często brakuje. Jednak należą się słowa pochwały tym zdającym za podjęcie sensownej próby.

Należy jednak wyraźnie podkreślić, że najwięcej zer w tym zadaniu zostało przyznanych za „dowody naiwne" – podobnie jak w zadaniu 30. na próbnej maturze. Otóż, znaczna grupa zdających przez dowód rozumiała podstawienie do nierówności w miejsce zmiennej $a$ jednej lub dwóch konkretnych wartości (dla prostoty obliczeń było to oczywiście $a=1$ lub $a=2$) skąd po wykonaniu stosownych obliczeń okazywało się, co jasne, że lewa strona jest większa lub równa od prawej. Stąd już krok do sformułowania wniosku o prawdziwości tej nierówności dla wszystkich liczb dodatnich. Pytanie brzmi: czy majowy egzamin maturalny był dla tych zdających pierwszą okazją do samodzielnego przeprowadzenia dowodu?

**Wyniki egzaminu z matematyki a niektóre wyniki uzyskane w zadaniu 30.**




Na zakończenie, na wykresie powyżej, zilustrowano zależność wyniku egzaminu z matematyki z wynikami uzyskanymi w zadaniu 30. Okazuje się, że jeżeli zdający otrzymywał oba punkty w zadaniu 30., to <u>na pewno</u> jego wynik egzaminu był równy co najmniej 20 punktów (i była tylko 1 taka osoba). Uwagę zwracają stosunkowo liczne (na przykład w porównaniu do wyników w zadaniu 28.) grupy zdających, którzy w zadaniu 30. uzyskali 2 punkty, zaś na egzaminie wyniki równe: 47, 48, 49 lub 50 punktów: takich zdających było, odpowiednio: 372, 402, 322 i 390.

Ponadto, spośród zdających, którzy w zadaniu 30. uzyskali jeden punkt (czyli pokonali zasadnicze trudności tego zadania), 24 osoby nie zdały egzaminu.

**Zamiast podsumowania**

Po wielu latach matematyka powróciła na maturę jako obowiązkowy egzamin. Wielkim wyzwaniem dla nauczycieli matematyki jest dobre przygotowanie uczniów do egzaminu na poziomie podstawowym. Warto wyrazić w tym miejscu nadzieję, że w sercach i umysłach nauczycieli znajdzie się miejsce na refleksje dotyczące wspierania uczniów w zgłębianiu przez nich trudnych operacji myślowych – prowadzenia rozumowań. W szczególności, może dojdą Państwo do wniosku, że warto wspólnie z uczniami na lekcji dokładnie przeanalizować cały zapis poprawnego rozwiązania zadania „Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe". Nawet jeżeli pierwsze spostrzeżenia i uwagi uczniów będą dotyczyły „oczywistej oczywistości" tego twierdzenia.